2008-2009 - 2nde 4 – Corrigé du Devoir Maison n°4

Exercice 1 : Remarque on sait que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Par conséquent, tout nombre appartenant à l'un de ces ensembles appartient nécessairement à tous les suivants.

x	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-13	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
59,0000002	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$-\frac{7}{4} = -1{,}75$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\sqrt{4} = 2$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\frac{23}{7}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$4 - \pi$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$

Exercice 2 :
1) L'inverse d'un entier non nul est un décimal.
Il faut comprendre : « L'inverse de n'importe quel entier non nul est un décimal », c'est-à-dire « Les inverses de tous les entiers non nuls sont des décimaux ». C'est donc faux à partir du moment où l'on trouve un entier non nul qui a un inverse non décimal.

$\boxed{\text{FAUX}}$: l'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$ qui n'est pas décimal.

2) L'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel .

$\boxed{\text{VRAI}}$: un rationnel non nul peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs différents de 0. L'inverse de $\frac{p}{q}$ est alors $\frac{q}{p}$, qui est aussi un rationnel, quotient de deux entiers non nuls.
Remarque : pour prouver qu'une proposition est vraie pour tout nombre (ici : tout rationnel), il ne suffit pas de l'illustrer par quelques exemples (cela prouve que c'est vrai dans des cas particulier, mais pas pour tout rationnel). Il faut utiliser alors des lettres qui peuvent prendre la valeur de tous les nombres possibles.

3) Le carré d'un irrationnel peut être rationnel.

$\boxed{\text{VRAI}}$: $\sqrt{2}$ est un irrationnel. Son carré $(\sqrt{2})^2 = 2$ est un rationnel.

4) Tout nombre entier est un décimal.

$\boxed{\text{VRAI}}$ car $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ d'après le cours. Les entiers sont des décimaux particuliers.

5) La racine carrée d'un entier naturel est toujours un irrationnel.

$\boxed{\text{FAUX}}$ Par exemple, $\sqrt{25} = 5$ et 5 est un entier, donc un rationnel.

6) La fraction $\dfrac{22}{7}$ est égale a 3,142857143

$\boxed{\text{FAUX}}$ car 3,142857143 est un décimal et pas $\dfrac{22}{7}$: si on pose la division, la même suite de décimales non nulle se répète indéfiniment. 3,142857143 n'est qu'une valeur approchée de $\dfrac{22}{7}$ affichée par la calculatrice.

On peut aussi faire (à la main) le produit $7 \times 3{,}142857143$. On trouve 22,000000001 et non 22.

7) L'inverse de $-\dfrac{16}{7}$ est un décimal.

$\boxed{\text{VRAI}}$ L'inverse de $-\dfrac{16}{7} = -\dfrac{7}{16} = -0{,}4375 \in \mathbb{D}$

8) $\sqrt{4^2 + 3^2}$ est un irrationnel.

$\boxed{\text{FAUX}}$, $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ qui est un entier donc un rationnel.

<u>**Exercice 3**</u> **:** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $\boxed{\textbf{6 points}}$

$(E_1)\ \dfrac{-2}{x^2 - 1} = \dfrac{5}{1 + x}$

<u>Valeurs interdites</u> :

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \boxed{-1}$ ou $x = \boxed{1}$

$1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$

On résout pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$.

$(E_1) \Leftrightarrow \dfrac{-2}{x^2 - 1} = \dfrac{5}{x + 1}$

$(E_1) \Leftrightarrow \dfrac{-2}{(x + 1)(x - 1)} = \dfrac{5\ (x - 1)}{(x + 1)(x - 1)}$ (On réduit au même dénominateur.)

$(E_1) \Leftrightarrow -2 = 5(x - 1)$ On a le droit de multiplier les deux membres par $(x+1)(x-1)$ car ce nombre est non nul, puisque x ne vaut ni 1 ni -1.

$(E_1) \Leftrightarrow -2 = 5x - 5$

$(E_1) \Leftrightarrow -5x = -3$

$(E_1) \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{5}$. $\dfrac{3}{5}$ n'est pas une valeur interdite. Donc $S = \left\{ \dfrac{3}{5} \right\}$

(E_2) $(3x + 7)^2 = 16x^2$

<u>Méthode 1</u> :
$(E_2) \Leftrightarrow (3x + 7)^2 = (4x)^2$
Deux nombres qui ont le même carré sont soit égaux, soit opposés.
$(E_2) \Leftrightarrow 3x + 7 = 4x$ ou $3x + 7 = -4x$
$(E_2) \Leftrightarrow -x = -7$ ou $7x = -7$
$(E_2) \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -1$ $S = \{ -1 ; 7 \}$

<u>Méthode 2</u> :
(E_2) $(3x + 7)^2 - 16x^2 = 0$
$(E_2) \Leftrightarrow (3x + 7)^2 - (4x)^2 = 0$
$(E_2) \Leftrightarrow (3x + 7 - 4x) (3x + 7 + 4x) 0$ En utilisant $a^2 - b^2 = (a + b) (a - b)$
$(E_2) \Leftrightarrow (-x + 7) (7x + 7) = 0$
Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.
$(E_2) \Leftrightarrow -x + 7 = 0$ ou $7x + 7 = 0$
$(E_2) \Leftrightarrow -x = -7$ ou $7x = -7$
$(E_2) \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -1$ $S = \{ -1 ; 7 \}$

(E_3) $\dfrac{2x - 3}{x + 2} - \dfrac{5x - 2}{x - 2} = \dfrac{-3x^2 + 7x}{x^2 - 4}$

<u>Valeurs interdites</u> :
$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2) (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$ ou $x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$

On résout donc pour $x \neq 2$ et $x \neq -2$, c'est-à-dire dans $\mathbb{R} \setminus \{ -2 ; 2 \}$

$(E_3) \Leftrightarrow \dfrac{(2x - 3)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} - \dfrac{(5x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \dfrac{-3x^2 + 7x}{x^2 - 4}$
$(E_3) \Leftrightarrow (2x - 3)(x - 2) - (5x - 2)(x + 2) = -3x^2 + 7x$

On a le droit de multiplier les deux membres par $(x + 2)(x - 2)$ puisque ce nombre est non nul, étant donné que $x \neq -2$ et $x \neq 2$.

$(E_3) \Leftrightarrow (2x - 3)(x - 2) - (5x - 2)(x + 2) = -3x^2 + 7x$
$(E_3) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 3x + 6 - (5x^2 + 10x - 2x - 4) = -3x^2 + 7x$
$(E_3) \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 6 - 5x^2 - 10x + 2x + 4 = -3x^2 + 7x$

$(E_3) \Leftrightarrow -3x^2 - 15x + 10 = -3x^2 + 7x$

$(E_3) \Leftrightarrow \quad -15x + 10 = 7x$

$(E_3) \Leftrightarrow \quad -22x = -10$

$(E_3) \Leftrightarrow x = \dfrac{-10}{-22} = \dfrac{5}{11}$

$\dfrac{5}{11}$ n'est pas une valeur interdite. Donc $S = \{\dfrac{5}{11}\}$