2007/2008 - $2^{nde}3$ – Corrigé du devoir Maison de mathématiques n°1

Exercice 1 : 1) $A(x) = -3(x-2)^2(x+2)$

$A(x) = -3(x-2)(x-2)(x+2)$

$A(x) = (-3x+6)(x^2-4)$

$\boxed{A(x) = -3x^3 + 6x^2 + 12x - 24}$

$B(x) = (2x^2+4x-5)(-3x^2-x+1)$

$B(x) = -6x^4 - 12x^3 - 2x^3 + 15x^2 - 4x^2 + 2x^2 + 5x + 4x - 5$

$\boxed{B(x) = -6x^4 - 14x^3 + 13x^2 + 9x - 5}$

2) $D(x) = 3(x-2)(x^2+1) - (6x^2-9)(x-2)$

$D(x) = 3(x-2)(x^2+1) - 3(2x^2-3)(x-2)$

$D(x) = 3(x-2)(x^2+1-(2x^2-3))$

$D(x) = 3(x-2)(x^2+1-2x^2+3)$

$D(x) = 3(x-2)(4-x^2)$

$D(x) = 3(x-2)(2+x)(2-x)$

$\boxed{D(x) = -3(x-2)^2(x+2)}$ $= A(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$E(a) = 16a^4 - 81$

$E(a) = (4a^2-9)(4a^2+9)$

$\boxed{E(a) = (2a-3)(2a+3)(4a^2+9)}$

$F(x) = x^2 - 2x + 1 - 7(x-1) + (x+2)(1-x)$

$F(x) = (x-1)^2 - 7(x-1) - (x+2)(x-1)$

$F(x) = (x-1)[(x-1) - 7 - (x+2)]$

$F(x) = (x-1)(x-1-7-x-2)$

$\boxed{F(x) = -10(x-1)}$

$G(x) = (6x-3)^2 - (2x-1)$

$G(x) = 9(2x-1)^2 - (2x-1)$

$G(x) = (2x-1)(9(2x-1)-1)$

$G(x) = (2x-1)(18x-9-1)$

$G(x) = (2x-1)(18x-10)$

$\boxed{G(x) = 2(2x-1)(9x-5)}$

Exercice 2 : $(E_1)\ \dfrac{4}{2-x} = \dfrac{3}{5}$ <u>Valeur « interdite »</u> : $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

On résout donc dans $\mathbb{R} - \{2\}$ (ou pour $x \neq 2$)

$(E_1) \Leftrightarrow 20 = 3(2-x) \Leftrightarrow \dfrac{20}{3} = 2 - x \Leftrightarrow x = 2 - \dfrac{20}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{3} - \dfrac{20}{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{14}{3}$

$-\dfrac{14}{3} \neq 2$ donc $\boxed{S = \left\{-\dfrac{14}{3}\right\}}$

$(E_2)\ \dfrac{x+5}{x+1} = \dfrac{x-1}{x-5}$ <u>Valeurs « interdites »</u> : $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ et $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

On résout donc (E_2) dans $\mathbb{R} - \{-1 ; 5\}$ (ou pour $x \neq -1$ et $x \neq 5$)

$(E_2) \Leftrightarrow (x+5)(x-5) = (x+1)(x-1)$

$(E_2) \Leftrightarrow x^2 - 25 = x^2 - 1 \Leftrightarrow -25 = -1$, ce qui est faux quel que soit x. Donc $\boxed{S = \varnothing}$

$$(E_3)\ \frac{5x+3}{4} - \frac{x-9}{3} = \frac{x}{2} + 5 \Leftrightarrow \frac{3(5x+3)}{12} - \frac{4(x-9)}{12} = \frac{6x}{12} + \frac{60}{12}$$

$\Leftrightarrow 3(5x+3) - 4(x-9) = 6x + 60$

$\Leftrightarrow 15x + 9 - 4x + 36 = 6x + 60$

$\Leftrightarrow 11x + 45 = 6x + 60$

$\Leftrightarrow 5x = 15$

$\Leftrightarrow x = 3$ $\boxed{S = \{ 3 \}}$

$(E_4)\ (4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 = 0$

$(E_4) \Leftrightarrow [(4x^2 - 3x - 18) - (4x^2 + 3x)] [(4x^2 - 3x - 18) + (4x^2 + 3x)] = 0$

$(E_4) \Leftrightarrow (-6x - 18)(8x^2 - 18) = 0$

$(E_4) \Leftrightarrow -6(x+3) \times 2(4x^2 - 9) = 0$

$(E_4) \Leftrightarrow -12(x+3)(2x+3)(2x-3) = 0$

$(E_4) \Leftrightarrow -12 = 0$ ou $x + 3 = 0$ ou $2x + 3 = 0$ ou $2x - 3 = 0$

$(E_4) \Leftrightarrow$ (jamais vrai) ou $x = -3$ ou $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{3}{2}$

$$\boxed{S = \left\{ -3 ; -\frac{3}{2} ; \frac{3}{2} \right\}}$$

$(E_5)\ \frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x-4} = 2 - \frac{2}{x-4}$ <u>Valeurs interdites</u> : $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

On résout dans $\mathbb{R} - \{ 4 ; 5 \}$

$$(E_5) \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{(x-4)(x-5)} + \frac{(x-6)(x-5)}{(x-4)(x-5)} = \frac{2(x-4)(x-5)}{(x-4)(x-5)} - \frac{2(x-5)}{(x-4)(x-5)}$$

Comme $x \neq 4$ et $x \neq 5$, on peut multiplier les deux membres de l'équation par le dénominateur $(x-4)(x-5)$ que l'on sait non nul.

$(E_5) \Leftrightarrow (x-4)^2 + (x-6)(x-5) = 2(x-4)(x-5) - 2(x-5)$

$(E_5) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + x^2 - 6x - 5x + 30 = 2(x^2 - 4x - 5x + 20) - 2x + 10$

$(E_5) \Leftrightarrow 2x^2 - 19x + 46 = 2x^2 - 8x - 10x + 40 - 2x + 10$

$(E_5) \Leftrightarrow -19x + 46 = -20x + 50$

$(E_5) \Leftrightarrow x = 4$ Mais 4 est une valeur « interdite » donc $\boxed{S = \varnothing}$

$(E_6)\ \frac{2x^2 - 50}{x+5} = 2x - 10$ <u>Valeur « interdite »</u> : $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$

On résout donc dans $\mathbb{R} - \{5\}$ ou encore pour $x \neq 5$.

$$(E_6) \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 25)}{(x+5)} = 2(x-5) \Leftrightarrow \frac{2(x+5)(x-5)}{(x+5)} = 2(x-5)$$

$(E_6) \Leftrightarrow 2(x-5) = 2(x-5)$ qui est vraie pour tout x de l'ensemble de résolution.

Donc $\boxed{S = \mathbb{R} - \{ 5 \}}$