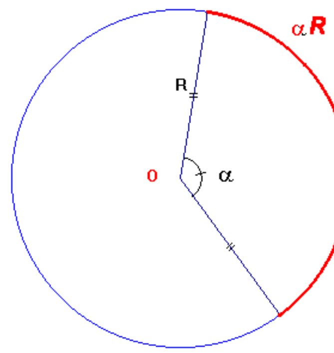
2^{nde} – Chapitre XV – Le radian, le cercle trigonométrique – Les fonctions sinus et cosinus

I – Le radian

Le **radian** est une unité d'angle définie pour qu'un tour complet (360°) corresponde à 2π radians.

degrés	360°	180°	90°	45°	60°	30°	120°	135°	
radians									1

Avantage du radian :
Comme le périmètre d'un cercle est égal à $2\pi \times R$ (R = rayon du cercle), lorsqu'un angle au centre α, exprimé en radians, intercepte un arc sur un cercle, la longueur de cet arc est égale à α R.

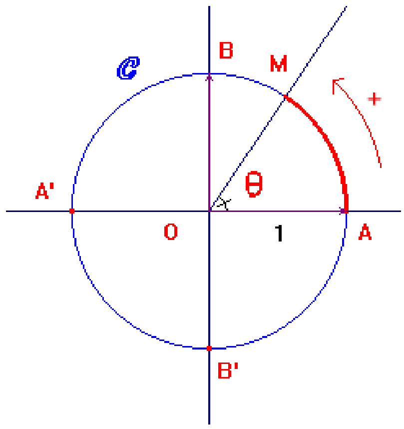


Si le cercle a pour rayon 1, l'angle intercepté en radians est égal à la longueur de l'arc.
C'est le cas pour le cercle trigonométrique.

(Mettez désormais vos calculatrices en mode radian)

II- Cercle trigonométrique et angles orientés

Dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on appelle **Cercle trigonométrique** le cercle de centre 0 et de rayon 1, orienté.



On oriente le plan : on définit un **sens** de rotation **positif** (ou encore **direct** ou **trigonométrique**) qui est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

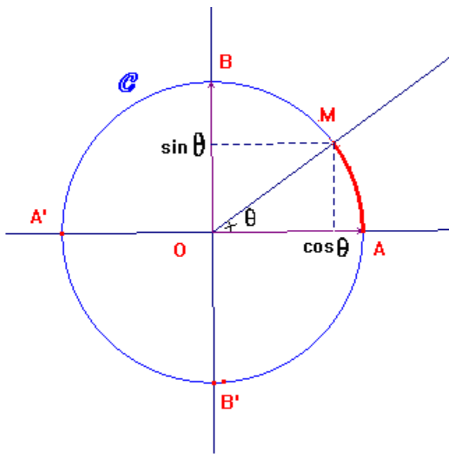
Le **sens négatif** ou **indirect** est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Les mesures d'angles seront désormais positives ou négatives selon que l'on tourne dans le sens direct ou non.

Pour l'angle $\widehat{MOA}$ par exemple, on distinguera les 2 cas :
$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ qui a une mesure positive car on tourne dans le sens direct.
$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA})$, qui a une mesure négative, opposée à celle de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$.
Supposons $\widehat{MOA}$ = 60°. Donner les mesures en radian de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ = ……… et $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA})$ = …………

III- Sinus et cosinus d'un angle orienté

Soit A le point de coordonnées (1 ; 0) et M un point du cercle trigonométrique. On nomme θ l'angle orienté $(\overrightarrow{OA} ;\overrightarrow{OM})$



On définit alors : **cos θ = abscisse de M**. (cosinus)
sin θ = ordonnée de M. (sinus)

Selon la position de M, son sinus et son cosinus varient entre – 1 et 1.

Remarque : pour $\theta \in [\, 0 ; \frac{\pi}{2}\,]$, dans le triangle OMH rectangle en H, on a bien $\boxed{\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}}$ et $\boxed{\sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}}$

Et d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle OHM, on a la propriété fondamentale : $\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$
Le sinus et le cosinus de θ sont maintenant définis pour tout réel θ (correspondant à un angle en radians)

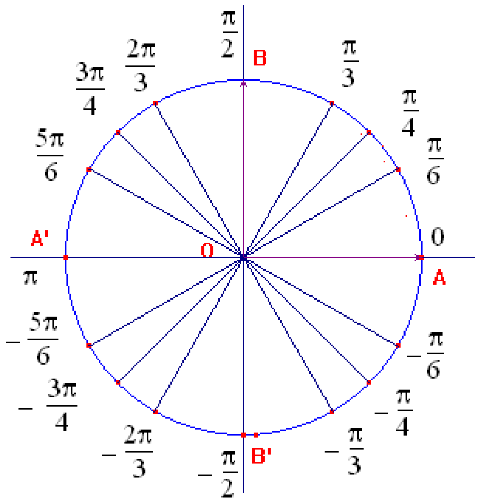
Valeurs particulières de sinus et cosinus à connaître par ♥ :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

D'autres valeurs de sinus et de cosinus à retrouver par symétrie :

$\cos\frac{2\pi}{3} = \ldots\ldots$ $\quad\sin\frac{2\pi}{3} = \ldots..$ $\quad\cos\frac{3\pi}{4} = \ldots\ldots..$ $\quad\sin\frac{3\pi}{4} = \ldots\ldots\ldots$

$\cos\frac{5\pi}{6} = \ldots\ldots$ $\quad\sin\frac{5\pi}{6} = \ldots..$ $\quad\cos\pi = \ldots\ldots..$ $\quad\sin\pi = \ldots\ldots\ldots$



Remarque : pour tout angle x,

$\boxed{\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \ldots\ldots$ $\quad\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \ldots\ldots$ $\quad\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \ldots..$ $\quad\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \ldots..$

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \ldots..$ $\quad\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \ldots..$ $\quad\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \ldots\ldots.$ $\quad\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \ldots\ldots..$

Remarque : pour tout angle x,

$\boxed{\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x}$

C'est pourquoi **la fonction cosinus est paire** et **la fonction sinus est impaire**.

$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3} = \ldots\ldots\ldots$

$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} = \ldots\ldots$ $\qquad\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{4} = \ldots\ldots$

$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6} = \ldots\ldots$ $\qquad\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6} = \ldots\ldots$

Remarque : pour tout angle x réel,

$\boxed{\cos(\pi + x) = -\cos x}$

$\boxed{\sin(\pi + x) = -\sin x}$

Remarque : modulo 2 π, les angles ont les mêmes sinus et cosinus. Exemple : un angle de 2π radians aura les mêmes sinus et cosinus qu'un angle de 0 radian.

Tout angle x aura même sinus et cosinus que x + 2π, θ – 2π ou x + 2k π k ∈ ℤ (nombre de tours dans 1 sens ou dans l'autre)

Pour tout angle x, $\boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos x}$ et $\boxed{\sin(x + 2\pi) = \sin x}$

C'est pourquoi les fonctions sinus et cosinus sont dites **périodiques de période 2π**.

Etude sur ℝ des fonctions sinus et cosinus (voir fiche)