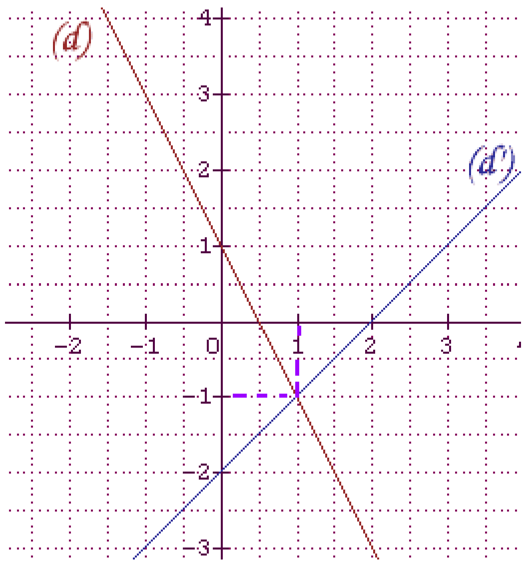
2^{nde} – Chapitre XIV – Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues se présente sous la forme
$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, a, b, c, a', b', c' sont six réels fixés. x et y sont les inconnues.
Les solutions du système sont les couples (x;y) qui rendent les deux égalités vraies.

I- Nombre de solutions d'un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues.

1) Trois exemples caractéristiques.

Exemple 1 : $(S_1) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x + 2y = -4 \end{cases}$
Traçons dans un repère les droites
(d) d'équation $2x + y = 1$
et (d') d'équation $-2x + 2y = -4$

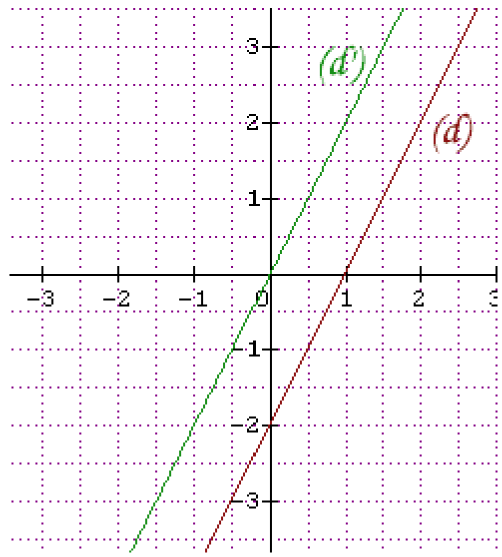


Les deux droites sont sécantes au point de coordonnées (1 ;-1).

Le système admet donc une unique solution : le couple (1 ;–1)

On note S = { (1 ;–1)}

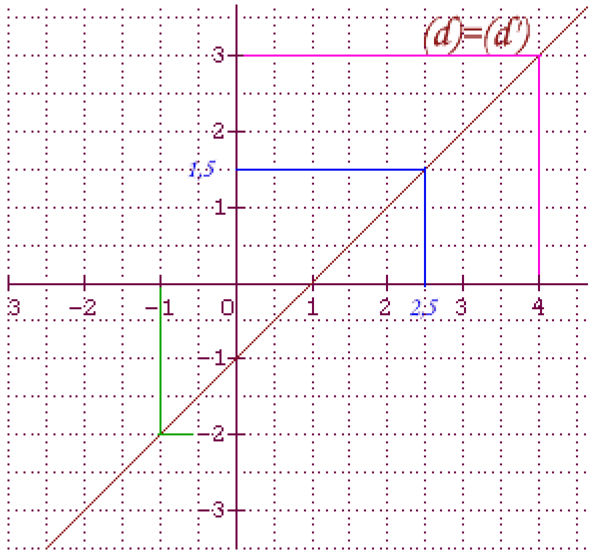
Exemple 2 : $(S_2) \begin{cases} 4x - 2y = -4 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$
Traçons dans un repère les droites
(d) d'équation $4x + 2y = -4$
et (d') d'équation $-4x + 2y = 0$



(d) et (d') sont strictement parallèles. Elles n'ont aucun point commun.
Le système d'admet donc pas de solution.

On note S = ∅

Exemple 3 : (S_3) $\begin{cases} -x + y = -1 \\ 6x - 6y = 6 \end{cases}$



Traçons dans un repère les droites
(d) d'équation $-x + y = -1$
et (d') d'équation $6x - 6y = 6$.

(d) et (d') sont strictement confondues. Elles ont tous leurs points en commun.
Tout couple (x,y) de coordonnées de points de (d) est solution du système.

S = { (x,y) tels que $x \in \mathbb{R}$ et $y = x - 1$ }

2) Connaître d'avance le nombre de solutions.

En règle générale, un système (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ admettra

- Un couple solution unique si les coefficients a et b ne sont pas proportionnels aux coefficients a' et b'

C'est le cas où les droites d'équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont sécantes.
On peut alors le résoudre par substitution, combinaisons linéaires ou une autre méthode.

- Aucune solution si a et b sont proportionnels à a' et b', mais a, b, c ne sont pas proportionnels à a', b' c'.

C'est le cas om les droites d'équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont strictement parallèles.

- Autant de solutions que de réels si a, b, c sont proportionnels à a', b', c'.

Les droites d'équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont alors confondues.

S = { (x,y) tels que $x \in \mathbb{R}$ et $ax + by = c$} (Pour chaque x réel choisi, on peut calculer une valeur de y telle que le couple (x,y) soit une solution de ce système)

Pour connaître le nombre de solutions du système (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

On calcule $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

S'il est $\neq 0$
Le système (S)
Admet un unique couple solution

S'il est $= 0$
On calcule $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^{*}$

S'il est = 0 $\downarrow$ Le système (S) admet pour Solutions tous les couples (x,y) Tels que ax + by = c

S'il est $\neq 0$ $\downarrow$ Le système (S) n'admet aucune solution

* ou $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$

II- Exemples de méthodes de résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

Une fois que l'on sait qu'un système admet une solution unique, on peut le résoudre.

1) Par substitutions.

Cette méthode est surtout recommandée lorsque l'un des coefficients de x ou de y est 1 ou – 1.

Résolvons (S) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -x + 4y = -6 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - (-1) \times 1 = 13$ $13 \neq 0$

(S) admet donc un seul couple solution.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 5 \\ -x + 4(-3x + 5) = -6 \end{cases}$ On écrit y en fonction de x dans une équation
On remplace y par son expression en fonction de x dans l'autre équation

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 5 \\ -x - 12x + 20 = -6 \end{cases}$ On calcule x en gardant intacte l'autre équation

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 5 \\ -13x = -26 \end{cases}$

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \times 2 + 5 \\ x = 2 \end{cases}$ Une fois x calculé, on le remplace par sa valeur dans l'autre équation.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ S = { (–1 ;2)}

2) Par combinaisons linéaires. (Méthode efficace, rapide et programmable)

Résolvons (S) $\begin{cases} 3x + y = 5 & L_1 \\ -x + 4y = -6 & L_2 \end{cases}$ On nomme les deux lignes du système L_1 et L_2.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 26 & L_1 \leftarrow 4L_1 - L_2 \\ 13y = -13 & L_2 \leftarrow L_1 + 3L_2 \end{cases}$

On remplace L_1 par une combinaison linéaire de L_1 et L_2 qui fait « disparaître » l'inconnue y

On remplace L_2 par une combinaison linéaire de L_1 et L_2 qui fait « disparaître »x.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & L_1 \leftarrow L_1 : 13 \\ y = -1 & L_2 \leftarrow L_2 : 13 \end{cases}$ On termine en divisant par les coefficients de x et de y.

S = { (–1 ;2)}

Faire un combinaison linéaire de plusieurs éléments signifie les additionner après les avoir multipliés chacun par des coefficients (qui peuvent être positifs, négatifs, fractionnaires etc…)