Chapitre 13_{bis} – Parallélisme dans l'espace

I- Définitions du parallélisme.

Définition : On dit que deux **droites** sont **coplanaires** quand il existe un même plan qui les contient toutes les deux.

Définition : Deux **droites** sont **strictement parallèles** lorsqu'elles sont coplanaires et n'admettent aucun point commun.

Remarque : Deux droites coplanaires sont soit parallèles, soit sécantes.

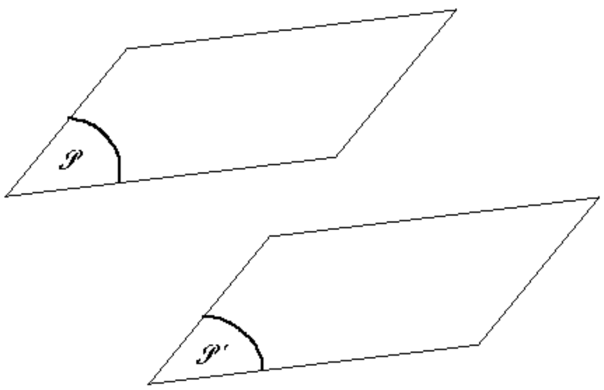
Définition : Deux **plans** sont **strictement parallèles** lorsqu'ils n'ont aucun point commun.

Définition : **Une droite et un plan** sont **strictement parallèles** lorsqu'ils n'ont aucun point commun.

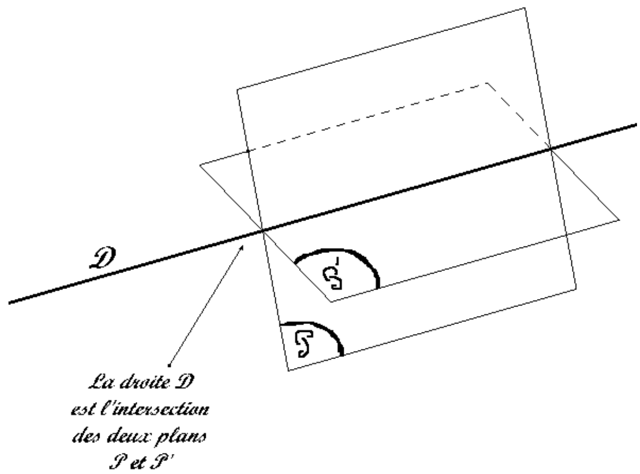
II- Positions relatives

1- Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace peuvent être confondus, (strictement) parallèles ou sécants.



Plans parallèles
Deux plans sont strictement parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point en commun



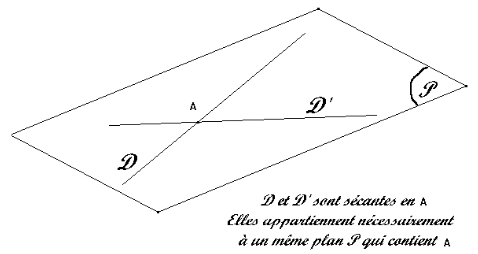
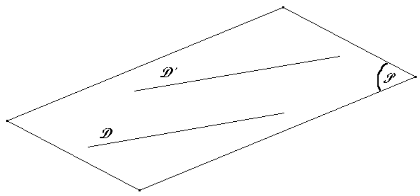
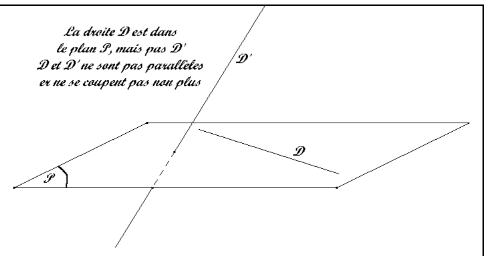
Plans sécants
L'intersection de deux plans est une droite

2- Positions relatives de deux droites.

Deux droites de l'espace peuvent être :
- Sécantes
- Parallèles

} Elles sont alors coplanaires

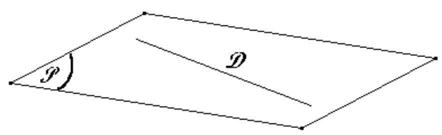
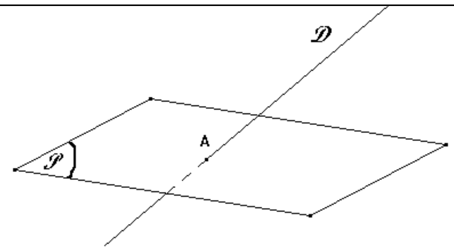
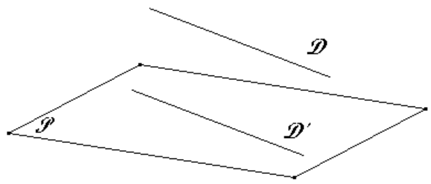
- Non-coplanaires

 Droites sécantes dans un plan P Propriété : 2 droites sécantes définissent un plan. (= il existe un plan et un seul qui contient deux droites sécantes données)	 Droites parallèles (contenues toutes deux dans un même plan P) Propriété : 2 droites strictement parallèles définissent un plan. (= il existe un plan et un seul qui contient deux droites strictement parallèles)	 Droites non coplanaires. Il n'existe pas de plan contenant ces deux droites à la fois.

Dans l'espace, deux droites qui n'ont pas de point commun ne sont pas nécessairement parallèles. Elles peuvent, aussi, être non coplanaires.

3- Positions relatives d'un plan et d'une droite.

Une droite D peut être : - Contenue dans un plan P
- Sécante au plan P
- (strictement) Parallèle à P.

 D est contenue dans P Tous les points de la droite appartiennent au plan	 D est sécante à P D et P n'ont qu'un point commun La droite « perce » le plan.	 D est parallèle à P : Elle est parallèle à une droite D' contenue dans P D et P n'ont aucun point en commun. Une droite D est parallèle à un plan P quand elle est parallèle à une droite contenue dans P.

III- Propriétés du parallélisme dans l'espace.

Propriétés :

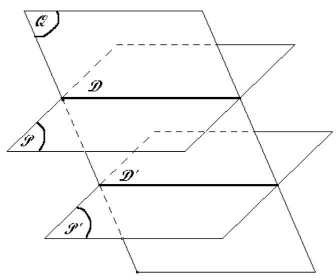
- Si deux plans sont parallèles, tout plan parallèle à l'un parallèle à l'autre.
- Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les intersections sont des droites parallèles. = Théorème 1
- Si deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre
- Si deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est aussi parallèle à l'autre
- Si deux droites sont parallèles, tout plan sécant à l'une est aussi sécant à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est aussi parallèle à l'autre.

- Si deux droites sont parallèles, toute droite parallèle à l'une est aussi parallèle à l'autre

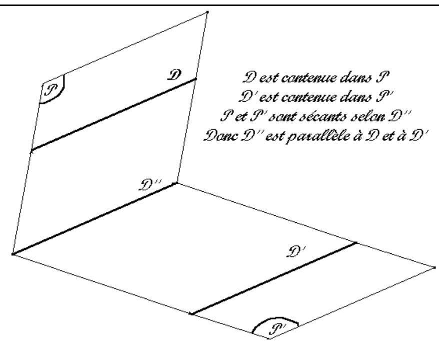
⚠ Si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une n'est pas nécessairement sécante à l'autre (si elle ne se situe pas dans le même plan que les deux droites parallèles)

Théorème 1 : Lorsque deux plans P et P′ sont parallèles, alors tout plan Q qui coupe P coupe aussi P′, et les intersections de Q avec les plans P et P′ sont deux droites parallèles.

Ci-contre : P et P′ sont parallèles.
Q coupe P selon D Q coupe P′ selon D′
Donc D et D′ sont parallèles.

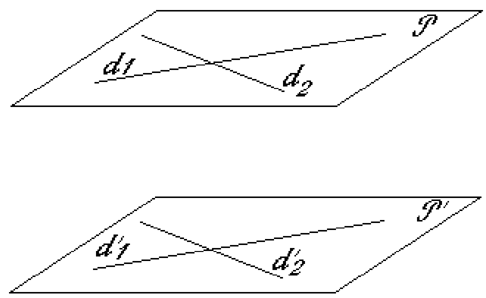


Théorème 2 : (Théorème « du toit »)
Si D et D′ sont deux droites parallèles, et que
- D est contenue dans un plan P
- D′ est contenue dans un plan P′
alors, si P et P′ sont sécants, leur intersection est parallèle à D et à D′.



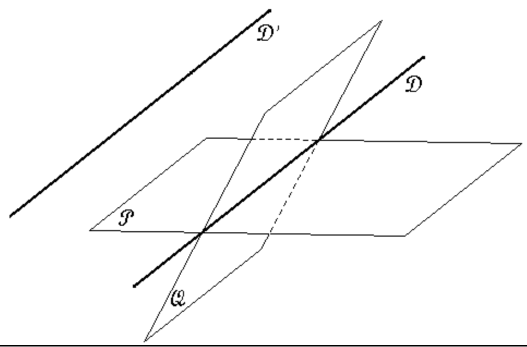
Théorème 3 :
Si deux droites sécantes d'un plan P sont parallèles, respectivement, à deux droites sécantes d'un plan P′, alors les plans P et P′ sont parallèles.

Ci-contre : d_1 et d_2 sont deux droites sécantes contenues dans P.
d'_1 et d'_2 sont deux de P', d'_1 étant parallèle à d_1 et d'_2 à d_2.
P et P' sont donc parallèles.



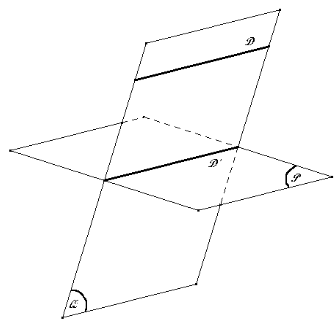
Théorème 4 : Si une droite D est parallèle à une droite D′, alors tout plan contenant D est parallèle à D′.

Ci-contre : D et D′ sont parallèles.
Les plans P et Q contiennent D.
Donc les plans P et Q sont parallèles à D′.



Théorème 5 :
Si D est une droite parallèle à un plan P, alors tout plan Q contenant D et sécant à P coupe P selon une droite parallèle à D.

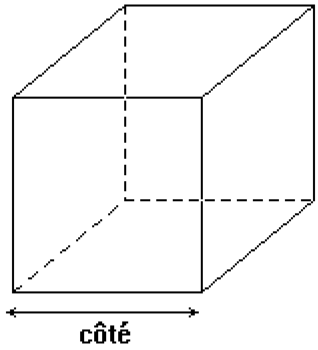
Ci-contre : La droite D est parallèle au plan P.
Le plan Q, contenant D, coupe P selon une droite D′, qui est nécessairement parallèle à D.



Volumes des solides de l'espace

Formules à connaître parfaitement

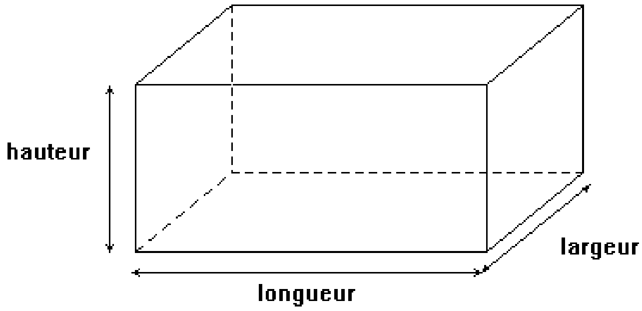
Cube :



Volume = côté ^{3}

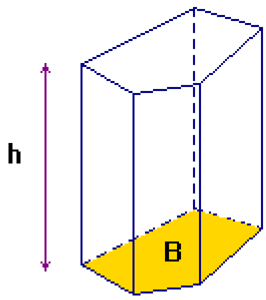
(Volume = côté × côté × côté)

Parallélépipède rectangle :



Volume = Longueur × largeur × hauteur

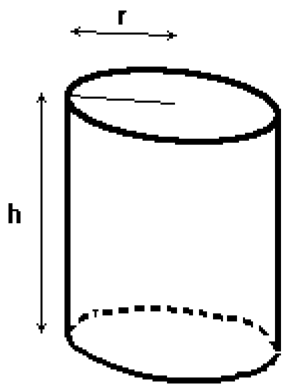
Prisme (droit ou non) :



Volume = Base × hauteur

Volume = B × h

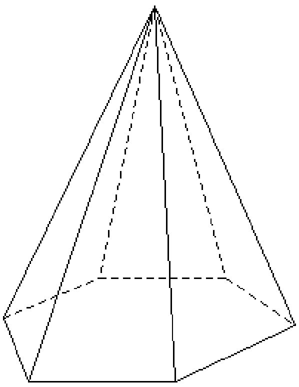
Cylindre :

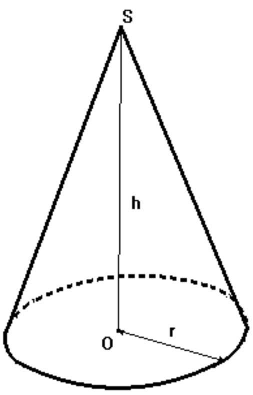


Volume = Base × hauteur

Volume = $\pi r^2 \times h$

Pyramide ou cône :

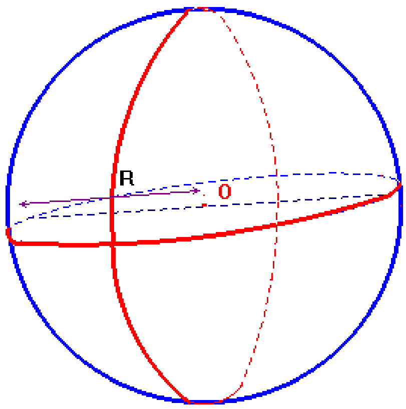




Volume = $\frac{1}{3}$ Base × hauteur

Pour le cône : **Volume = $\frac{1}{3} \pi r^2 \times h$**

Sphère :



Volume de la boule = $\frac{4}{3} \pi R^3$

Aire latérale de la sphère = $4 \pi R^2$