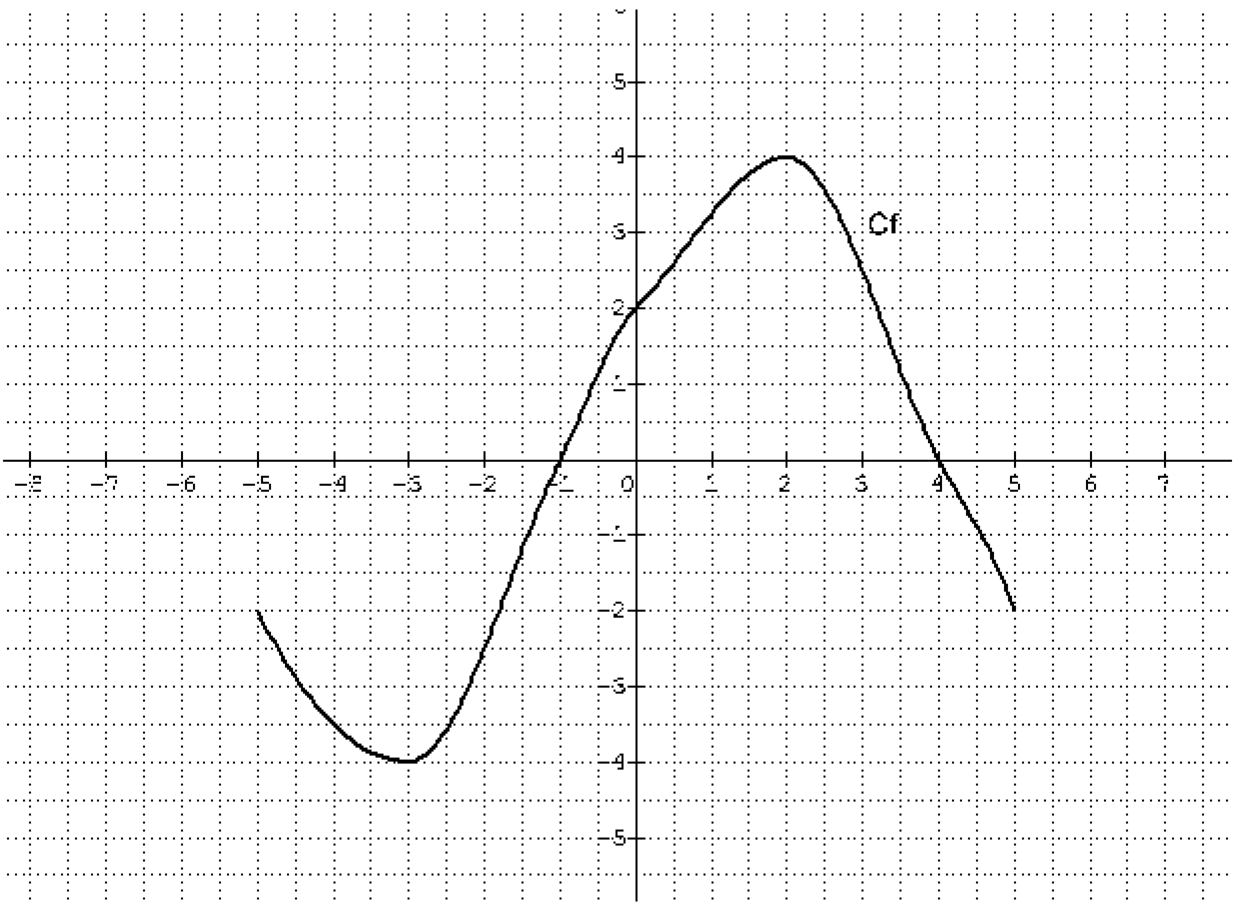
Ch09 – Généralités sur les fonctions et lecture graphique.

I- Image et antécédent par une fonction

Une **fonction** f est une procédure qui, à un nombre x, associe un nombre noté f(x), appelé **l'image** de x par f.

Exemple 1 : f : $x \longmapsto 2x^2 - x$
(f est la fonction qui à tout nombre x associe le nombre $2x^2 - x$)
Pour tout x, $f(x) = 2x^2 - x$.
En particulier, si $x = -3$, l'image de -3 par f est $f(-3) = 2\times(-3)^2 - (-3) = 21$
Si $x = 4$, l'image de 4 par f est $f(4) = 2\times4^2 - 4 = 28$

Exemple 2 : f est la fonction dont la courbe représentative est la suivante :



On dit que **f est définie sur** l'intervalle [– 5 ; 5], car seuls les nombres compris entre – 5 et 5 admettent des images par f. [– 5 ; 5] est **l'ensemble de définition** de f.

Lecture-image :
On peut lire facilement les images de quelques nombres de l'intervalle [– 5 ; 5] par f :
$f(-5) = -2$ $\quad$ $f(-3) = -4$ $\quad$ $f(1) = 0$ $\quad$ $f(0) = 2$ $\quad$ $f(2) = 4$
$f(4) = 0$ $\quad$ $f(5) = -2$

Lecture antécédent : On dit qu'un nombre x est **un antécédent** d'un nombre y par f lorsque f(x) = y.
Lire les antécédents de 0 sur la courbe : …………………………………………………….
Les antécédents de 0 sont les solutions de l'équation f(x) = 0
Lire les antécédents de – 2 sur la courbe : ……………………………………………..
Les antécédents de 0 sont les solutions de l'équation f(x) = – 2

Résoudre graphiquement l'équation f(x) = 2
On trouve 2 solutions, …….. et ………. , qui sont les antécédents de 2 par f.

Remarque : certains nombres n'ont pas d'antécédent, comme – 5 ou 4,5.

Retenir : **un nombre x ne peut admettre qu'une seule image f(x) par une fonction f.**
Un nombre y peut avoir plusieurs antécédents par f.

Exercice : g est la fonction qui à x associe g(x) = (x – 10) (x + 4)
Quels sont les antécédents de 0 par g ?

II- Ensemble de définition

Définition : **L'ensemble de définition** d'une fonction f est l'ensemble des nombres x qui admettent une image par f.

Sur l'exemple 2, l'ensemble de définition de f était l'intervalle [– 5 ; 5], car f(x) existe si et seulement si x ∈ [– 5 ; 5]
Exemple 3 : f : $x \longmapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$
L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\backslash\{0\,;2\}$ car 0 et 2 sont des « **valeurs interdites** », c'est-à-dire que f(x) n'existe pas si x = 0 ou si x = 2.

$\mathbb{R}\backslash\{0;2\}$ se note aussi $\mathbb{R}-\{0;2\}$ ou encore
$]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;2\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty\,[$ (réunion de 3 intervalles)

On note : f : $\mathbb{R}\backslash\{0\,;2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ (« f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0;2\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$ qui à x associe $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$ »)

Notation : On note souvent Df l'ensemble de définition d'une fonction f, Dg celui d'une fonction g, etc…

Dans la pratique : quand une fonction est donnée par une formule, son ensemble de définition est $\mathbb{R}$ – {valeurs interdites}

Il existe plusieurs sortes de valeurs interdites :
- Celles qui annulent les dénominateurs.
- Celles qui rendent négatif un nombre sous une racine carrée. …et d'autres encore.

III- Courbe représentative

Définition : la **courbe représentative** d'une fonction est l'ensemble des points du plan de coordonnées (x ; f(x)), $x \in$ Df. Pour une fonction f, on la note souvent Cf.

Un point M (x ; y) appartient à la courbe représentative de f si et seulement si f(x) = y.

Exemple pour $f : x \longmapsto -x + 1$
A (3 ; − 2) ∈ Cf (A est sur la courbe) car f(3) = − 3 + 1 = − 2
B (3 ; 0) ∉ Cf (B n'est pas sur la courbe) car f(3) ≠ 0.

IV- Variations

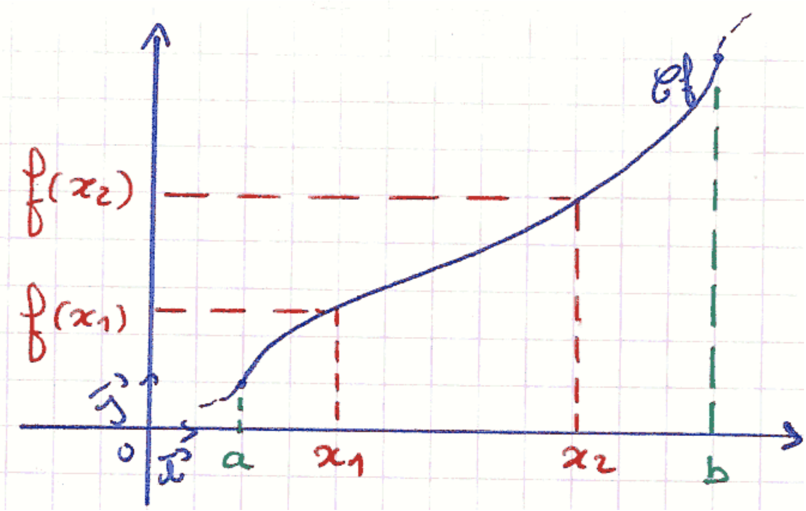
1- Fonction croissante ou strictement croissante sur un intervalle.

Une **fonction** est dite « **croissante** » sur un intervalle I lorsqu'elle **conserve l'ordre** sur cet intervalle.

Traduction numérique :

Pour tous x_1 et x_2 de I
$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
(x_1 est plus petit que x_2 si et seulement si $f(x_1)$ est plus petit que $f(x_2)$)

Et pour une fonction strictement croissante :
Pour tous x_1 et x_2 de I
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$



Ici : f est strictement croissante sur l'intervalle [a,b].
Sa courbe « monte » de gauche à droite.
Pour tous x_1 et $x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

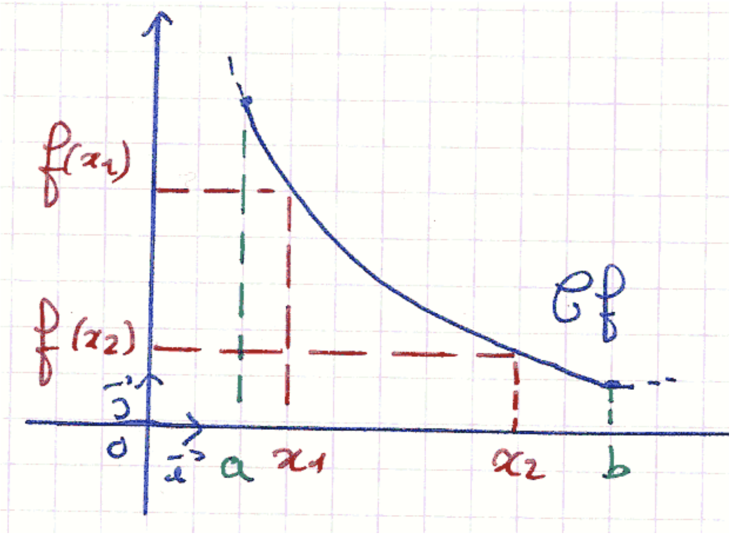
2- Fonction décroissante ou strictement décroissante sur un intervalle.

Une **fonction** est dite « **décroissante** » sur un intervalle I lorsqu'elle **inverse l'ordre** sur cet intervalle.

Traduction numérique :

Pour tous x_1 et x_2 de I
$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
(x_1 est plus petit que x_2 si et seulement si $f(x_1)$ est plus grand que $f(x_2)$)

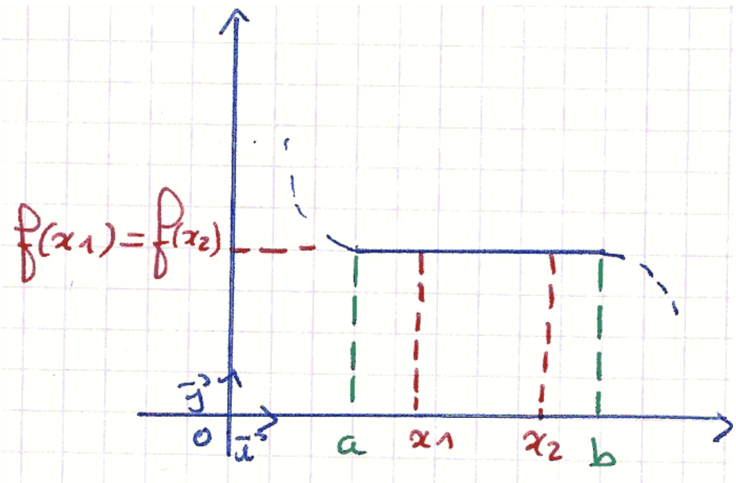
Et pour une fonction strictement décroissante :
Pour tous x_1 et x_2 de I
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Ici : f est strictement croissante sur l'intervalle [a,b].
Sa courbe « descend » de gauche à droite.
Pour tous x_1 et $x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

3- Fonction constante sur un intervalle.

Une fonction est constante sur un intervalle I lorsque, pour tous x_1 et $x_2 \in$ I, $f(x_1) = f(x_2)$
(Toutes les images de x sont les mêmes, quel que soit $x \in$ I)



Ci-contre, la fonction f est constante sur l'intervalle [a,b]

Sa courbe est « horizontale » entre les abscisses a et b.

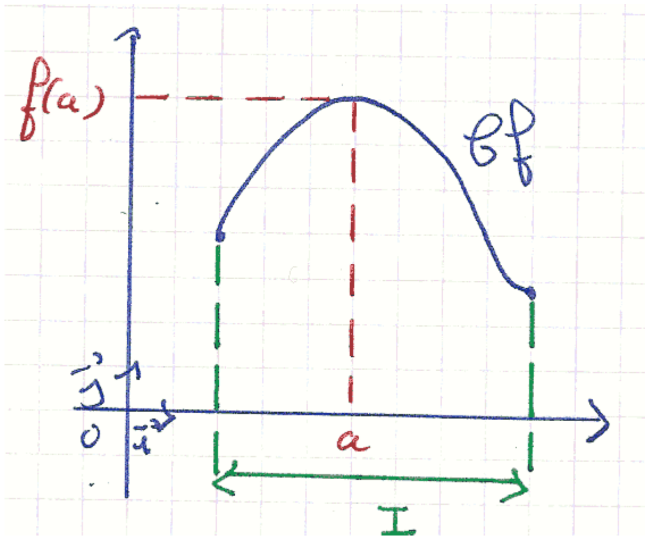
Pour tous x_1 et x_2 de [a,b],
$f(x_1) = f(x_2)$

4- Fonction monotone ou strictement monotone sur un intervalle.

On dit qu'une fonction est **monotone** sur un intervalle si son sens de variations reste le même sur cet intervalle : soit croissant, soit décroissant, soit constant.

On dit qu'une fonction est **strictement monotone** sur un intervalle si elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur cet intervalle.

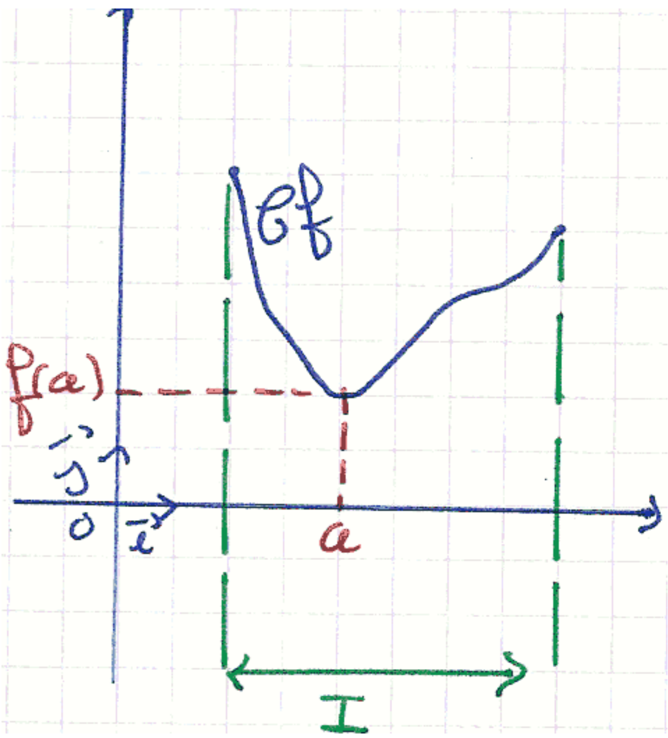
V- Extremum (= maximum ou minimum)



Une fonction f admet un maximum en a sur un intervalle I (a est un élément de I) si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$

Ici : f admet un maximum en a sur I.
Ce maximum est le nombre f(a)

Un maximum absolu est la valeur maximale de f(x) atteinte sur tout l'ensemble de définition de f.



Une fonction f admet un minium en a sur un intervalle I (a est un élément de I) si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$

Ici : f admet un minimum en a sur I.
Ce minimum est le nombre f(a)

Un minimum absolu est la valeur minimale de f(x) atteinte sur tout l'ensemble de définition de f.

VI – Tableau de variations.

Le tableau de variations d'une fonction fait apparaître et récapitule :

- Son ensemble de définition (les valeurs interdites sont notées entre ||)
- Ses variations (selon les intervalles)
- Ses extrema
- Ses limites (quand vous les aurez étudiées)

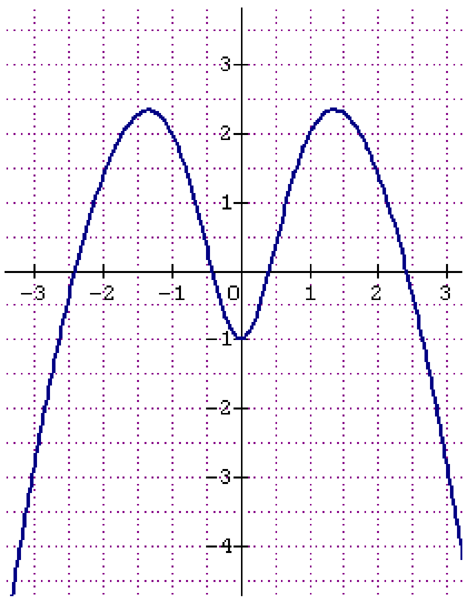
Exemple pour une fonction définie par sa courbe :

Etablissons le tableau de variations de la courbe de l'exemple 2 :

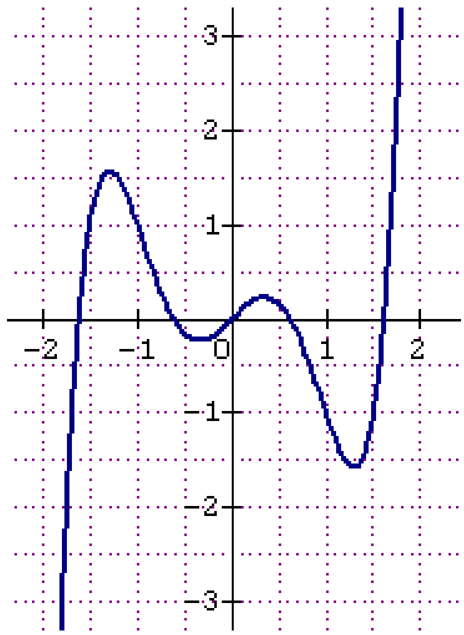
x	− 5		− 3		2		5
f(x)	−2	↘	− 4	↗	4	↘	− 2

VII- Parité d’une fonction

Lorsque la courbe représentative d’une fonction présente une symétrie, on peut n’étudier la fonction que sur la moitié de son ensemble de définition.



Une fonction dont la courbe représentative est symétrique par rapport à l’axe des ordonnées (en repère orthogonal) est une fonction **« paire »**



Une fonction dont la courbe représentative est symétrique par rapport à l’origine du repère est une fonction **« impaire »**

⚠ Une fonction n’est pas forcément paire ou impaire : la plupart des fonctions ne sont ni l’un ni l’autre.

Pour prouver qu’une fonction f définie sur un ensemble Df est paire, on doit vérifier :
1) Que pour tout $x \in$ Df, $-x \in$ Df
2) Que pour tout $x \in$ Df, $f(-x) = f(x)$ (deux nombres opposés ont la même image par f)

Exemple : prouvons que $f : x \longmapsto (x + 4)(x - 4)$ est paire.

- f est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x + 4)(-x - 4)$

$$
\begin{aligned}
&= [-(x-4)] \times [-(x+4)] \\
&= +(x-4)(x+4) \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

Donc f est paire. Sa courbe représentative sera symétrique par rapport à l’origine du repère.

⚠ La propriété $f(-x) = f(x)$ doit être vérifiée pour tout x de Df, donc à l'aide d'une lettre, et non pour quelques valeurs choisies : ce n'est pas parce que $f(-2) = f(2)$, par exemple, que f sera nécessairement paire.

Pour prouver qu'une fonction f définie sur un ensemble Df est impaire, on doit vérifier :
1) Que pour tout $x \in Df$, $-x \in Df$
2) Que pour tout $x \in Df$, $f(-x) = -f(x)$ (Deux nombres opposés ont des images opposées)

Exemple : prouvons que $f : x \longmapsto x - \frac{1}{x}$ est impaire.

- f est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, son opposé $-x \in \mathbb{R}^*$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = -x - \frac{1}{-x} = -x + \frac{1}{x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$

f est donc une fonction impaire. Sa courbe représentative sera donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

VIII- Plan d'étude d'une fonction.

Pour étudier une fonction donnée par une formule, on suit le plan suivant.

1- On détermine son ensemble de définition
2- On étudie sa parité ou sa périodicité, ce qui permet, si la fonction est paire, impaire ou périodique, de réduire l'ensemble d'étude.
3- On étudie ses variations
4- On détermine ses extrema et ses limites
5- On fait un tableau de variations
6- On fait un tableau de valeurs
7- On trace la courbe dans un repère

Lorsque cous étudierez la dérivation, on calculera la fonction dérivée en 3) et on cherchera son signe pour établir les variations et les extrema. L'étude de la dérivée permet de placer certaines tangentes sur le graphique qui aident à tracer la courbe.