2^{nde} Ch VIII – Inéquations et tableaux de signes

Pour la résolution d'inéquations simples, se référer aux règles sur l'ordre, chapitre VI

I- Signe de ax + b *(voir exercice 1 du devoir maison n°6)*

a et b étant des réels fixés, tels que $a \neq 0$, le signe de $ax + b$ est donné par les tableaux de signes suivants :

Cas où $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
ax + b		$-$	0	$+$	

Cas où $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
ax + b		$+$	0	$-$	

On peut retenir que $ax + b$ est du signe de a « à droite du zéro », c'est-à-dire pour x supérieur à $-\frac{b}{a}$.

II- Recherche du signe d'un produit. *(voir exercice 2 du devoir maison n°6)*

Pour résoudre une inéquation dont un membre est un produit et le second membre vaut 0, on utilise un tableau de signes :
- Dans la première ligne (x), on fait figurer les « zéros » (= valeurs qui annulent les facteurs) dans l'ordre croissant, comme sur une droite graduée, entre $-\infty$ et $+\infty$
- Sous le x, on inscrit chacun des facteurs, puis, dans la dernière ligne, le produit.
- Dans chaque ligne, on place le zéro de chaque facteur, puis des + et des – dans les intervalles selon la règle vue au paragraphe I.
- Dans la dernière ligne, on place tous les zéros, puis on complète dans les intervalles avec des + et des – en suivant la règle des signes
- Enfin, on lit à l'aide de cette dernière ligne les intervalles qui correspondent au signe cherché pour le produit dans l'inéquation de départ.

Exemple : Nous voulons résoudre l'inéquation $-3x\,(x - 12)\,(6 - 3x) \geq 0$

1ère étape : on recherche les zéros du produit

$-3x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

$x - 12 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 12}$

$6 - 3x = 0 \Leftrightarrow 6 = 3x \Leftrightarrow \boxed{2 = x}$

2$^{\text{ème}}$ étape : on construit puis remplit le tableau de signes.

x	$-\infty$		0		2		12		$+\infty$
$-3x$		+	0	−		−		−	
$x-12$		−		−		−	0	+	
$6-3x$		+		+	0	−		−	
$-3x(x-12)(6-3x)$		−	0	+	0	−	0	+	

3$^{\text{ème}}$ étape : on lit l'ensemble des solutions.

Dans l'inéquation $-3x(x-12)(6-3x)$ $\boxed{\geq 0}$, on recherche les intervalles où doit se trouver x pour que le produit soit $\boxed{\text{positif ou nul}}$.

Ici : $S = [\,0\,;\,2\,] \cup [\,12\,;\,+\infty\,[$

II- Recherche du signe d'un quotient.

Très semblable à la recherche du signe d'un produit.
La seule différence : les zéros du dénominateur sont des valeurs interdites pour le quotient.

Exemple : Résolvons l'inéquation $\dfrac{4x(2x-8)}{(x+3)(-3x+12)} \leq 0$

Etape 1 : Recherche des zéros et des valeurs interdites.

Les zéros (= valeurs de x qui annulent le numérateur) : $4x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$

$2x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow \boxed{x=4}$

Les valeurs interdites (= valeurs de x qui annulent le dénominateur) : $x + 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=-3}$

$-3x + 12 = 0 \Leftrightarrow -3x = -12 \Leftrightarrow \boxed{x=4}$

Remarque : ici, on trouve la même valeur, 4, pour un zéro et pour une valeur interdite. Comme le quotient $\dfrac{4x(2x-8)}{(x+3)(-3x+12)}$ n'aurait pas de sens si x valait 4, ce sera au final une valeur interdite.

Etape 2 : Tableau de signes

x	$-\infty$		-3		0		4		$+\infty$
$4x$		−		−	0	+		+	
$2x-8$		−		−		−	0	+	
$x+3$		−	0	+		+		+	
$-3x+12$		+		+		+	0	−	
$\dfrac{4x(2x-8)}{(x+3)(-3x+12)}$		−	‖	+	0	−	‖	−	

Les valeurs interdites sont indiquées par des ‖ dans la ligne du signe du quotient.

Etape 3 : Lecture de l'ensemble des solutions.

On cherche les valeurs de x pour lesquelles le quotient $\dfrac{4x(2x-8)}{(x+3)(-3x+12)}$ est négatif ou nul (≤ 0). Ici, on lit : $S =]-\infty\,;\,-3\,[\cup [\,0\,;\,4\,[\cup]\,4\,;\,+\infty\,[$