2nde – Chapitre VII – Les vecteurs dans le plan

I- Caractéristiques d'un vecteur, vecteurs égaux

Un vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par

- ……………………..
- ……………………..
- …………………….. (appelée aussi **norme**)

La …………… ou ………………. d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$

Propriété : la …..……… d'un vecteur est un nombre positif ou nul.

Définition : Deux **vecteurs** sont **égaux** quand ils ont

- …………………………………..
- ………………………………….
- ………………………………….

Dessiner deux vecteurs de même direction (comprendre « parallèles ») ayant le même sens mais pas la même norme :

Dessiner deux vecteurs de même direction mais de sens contraires et de normes différentes :

Dessiner deux vecteurs de même norme qui n'ont pas la même direction :

Cas particulier : le **vecteur nul** noté $\vec{0}$, qui n'a ni direction ni sens.

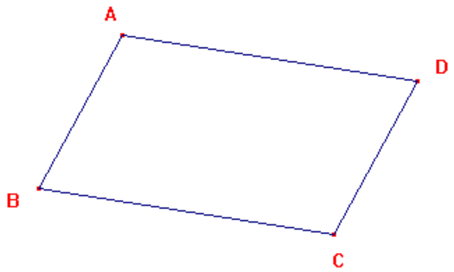
Propriété caractéristique[1] du parallélogramme par égalité de 2 vecteurs :

…………………………………………………………………………………………

($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont deux représentants du même vecteur)

Citer toutes les égalités vectorielles qui sont équivalentes à l'affirmation « ABCD est un parallélogramme » :

………………………………
……………………………....
………………………………
………………………………



Ne pas vous tromper dans le sens : dans $\overrightarrow{AB}$, A est l'origine et B l'extrémité.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ mais $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$.

Définition : deux vecteurs qui ont …………………… et ………………… mais de …… contraires sont deux **vecteurs opposés**. Le vecteur opposé de $\vec{u}$ est noté $-\vec{u}$.

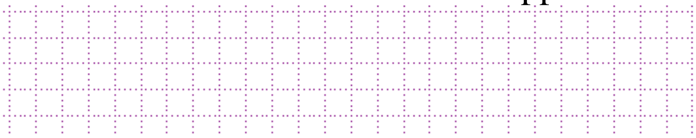
Citer des couples de vecteurs opposés dans le parallélogramme ABCD :

…………………… ………………………. ………………… ……………………….

[1] Caractéristique = qui caractérise. Une propriété caractéristique du parallélogramme est une condition nécessaire et suffisante pour que le quadrilatère soit un parallélogramme. ABCD est un parallélogramme ⇔ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

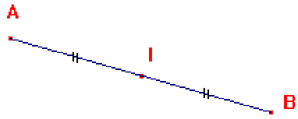
Remarque : Pour tous points A et B du plan, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Dessiner deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ opposés :



Propriété caractéristique du milieu d'un segment par égalité de deux vecteurs :
…………………………………………………………………………………

Citer 2 égalités vectorielles signifiant que I est le milieu de [AB]
……………..   ……………..



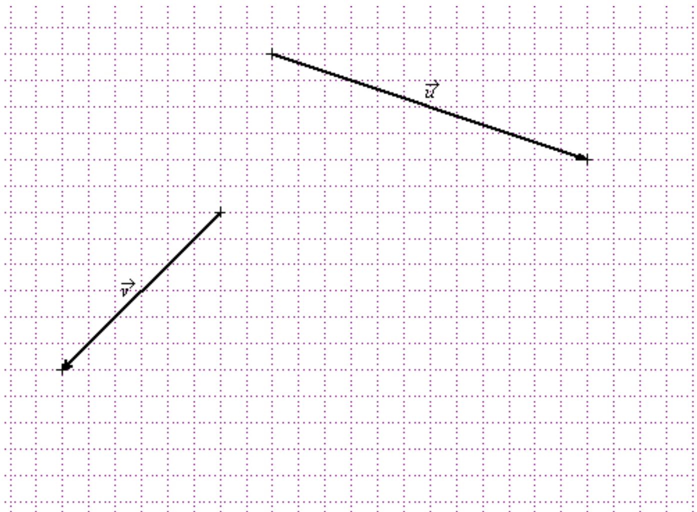
⚠ AI = IB (égalité de deux longueurs) ne suffit pas pour prouver que I est le milieu de [AB] (I est alors sur la médiatrice de [AB], mais pas forcément sur le segment [AB])

Remarque : $\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$, $\boxed{2\,\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}}$, $\boxed{\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}}$, $\boxed{2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}}$, $\boxed{\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB}}$ etc…
Sont d'autres égalités vectorielles équivalentes à l'affirmation « I est le milieu de [AB]»

II- Somme de deux vecteurs.

Dessiner un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$, somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

Pour obtenir le vecteur somme, on place bout à bout les deux vecteurs, l'extrémité du premier se confondant avec l'origine du second. Le vecteur somme a l'origine du premier et l'extrémité du second.



D'où la Relation de Chasles :
Pour tous points A, M, B du plan,
$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}}$ **ou** $\boxed{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}}$

Applications courantes :

- Décomposition d'un vecteur en somme de plusieurs vecteurs :

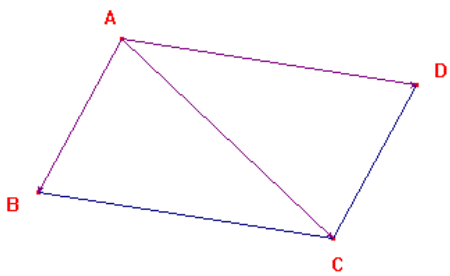
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\ldots P} + \overrightarrow{\ldots R} + \overrightarrow{\ldots K} + \overrightarrow{\ldots}$ ⚠ l'extrémité de l'un est l'origine du suivant

- Réduction d'une somme de vecteurs :

$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{KU} + \overrightarrow{TK} + \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{UL} =$ ………………………………………………….. = …………..

Propriété caractéristique du parallélogramme par la somme de 2 vecteurs :
…………………………………………………………………………………

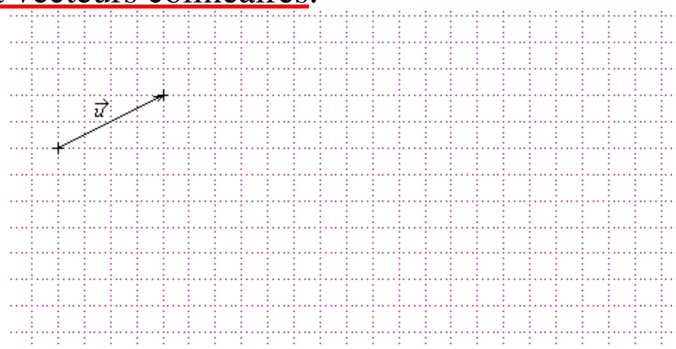
Citer 4 égalités avec sommes de vecteurs équivalentes à l'affirmation « ABCD est un parallélogramme »
……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………



III- Multiplication d'un vecteur par un réel et vecteurs colinéaires.

On donne un vecteur $\vec{u}$.
Tracer un représentant de chacun des vecteurs : $2\vec{u}$, $3\vec{u}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$; $\frac{3}{2}\vec{u}$

$-\vec{u}$; $-3\vec{u}$; $-\frac{1}{2}\vec{u}$



Définition : on dit que deux **vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarques : si $k > 0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même ……….. et même …………
si $k < 0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même ……………mais sont de ……………………
si $k = 0$, l'un des deux au moins est le vecteur nul.

Propriété : Dire que deux vecteurs non-nuls sont colinéaires signifie qu'ils ont …………
……………………..

Remarque : le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs du plan.

On utilise donc la colinéarité pour prouver :

Que deux droites sont parallèles	Que trois points sont alignés
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires non-nuls équivaut à (AB)//(CD)	**$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ A, B, C sont alignés**

Propriétés calculatoires (admises) :

Commutativité de l'addition : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}}$

Pour faire la différence de deux vecteurs, on additionne l'opposé du second :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et pour tous réels k et k' :

$k\vec{u} + k'\vec{u} = (k + k')\vec{u}$	$k\vec{u} + k\vec{v} = k(\vec{u} + \vec{v})$	$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u} = k'(k\vec{u})$

Astuce pour les problèmes de démonstration : Pour prouver que deux vecteurs sont colinéaires, on peut les exprimer tous deux en fonction de deux vecteurs de base (non-colinéaires) connus.

Exemples : Lorsqu'on travaille dans un triangle ABC, on peut exprimer les vecteurs utiles en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de la relation de Chasles (Ex : n°43 p 214)

Lorsqu'on travaille dans un parallélogramme ABCD, on peut exprimer les vecteurs en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ (Ex : n°42 p 214)