2^{nde} – Chapitre VI – Règles sur l'ordre

Ce chapitre vous expose les règles qui vous permettront de manipuler les inégalités et les inéquations.
Attention, aucune règle autre que celles de ce cours n'a le droit d'être appliquée : n'en « inventez » pas

I- Opérations effectuables sur les deux membres d'une inégalité.

Règle 1 : on a le droit d'ajouter ou de soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité sans changer son sens.

Règle 2 : on a le droit de multiplier ou de diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement positif sans changer son sens

Règle 3 : on a le droit de multiplier ou de diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement négatif en changeant son sens.

Exemple : $-2 < 1$ est une inégalité vraie.
$-2 + 3 < 1 + 3$ est toujours vraie (additionnant 3 aux deux membres)
$-2 - 4 < 1 - 4$ est toujours vraie (soustrayant 4 aux deux membres)
$10 \times (-2) < 10 \times 1$ est toujours vraie (multipliant les 2 membres par 10)
$-2 \times (-2) > -2 \times 1$ On doit changer le sens si on multiplie par -2 qui est négatif

⚠ on ne peut pas multiplier ou diviser les deux membre d'une inégalité par zéro ni par un nombre qui peut valoir 0. De plus, pour multiplier ou diviser les deux membres par un nombre, il faut connaître son signe !

Application : résoudre l'inéquation (I_1) $-5x + 3 > \frac{x}{2} - 5$

II- Opérations membre à membre

Règle 4 : **on a le droit d'additionner deux inégalités de même nature membre à membre**

Si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$

Règle 5 : **on a le droit de multiplier membre à membre deux inégalités de même nature, mais uniquement si tous les membres sont des nombres positifs.**

Si $0 \leq a < b$ et $0 \leq c < d$, alors $(0 \leq)\ ac < bd$

⚠ On n'a pas le droit de soustraire membre à membre ni de diviser membre à membre.
On n'a pas non plus le droit de multiplier membre à membre si tous les nombres ne sont pas positifs.

Application : On donne $2 < x < 5$ et $-10 < y < -3$.

Donner un encadrement de chacune des expressions : $x + y$; $x - y$; $3x - 2y$; xy et $\frac{x}{y}$

III- Passage au carré, à la racine carrée et à l'inverse.

1) Passage au carré.

Règle 6 : Des nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.
Des nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs carrés.

Exemples : $2 < 5$ et $4 < 25$ $\qquad$ $-4 < -3$ mais $(-4)^2 > (-3)^2$

Remarque : si les deux nombres n'ont pas le même signe, on ne peut pas conclure.

2) Passage à la racine

Règle 7 : des nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leur racine carrée.

Exemple : $3 < 4 < 8$ donc $\sqrt{3} < \sqrt{4} < \sqrt{8}$

3) Passage à l'inverse.

Règle 8 : des nombres de même signe sont rangés dans l'ordre inverse de leurs inverses.

Exemples : $1 < 2 < 3 < 10$ mais $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{2} > \frac{1}{10}$

$-10 < -4$ mais $-\frac{1}{10} > -\frac{1}{4}$

IV – Ordre des puissances de nombres positifs.

Règle : On considère un nombre positif a.

- Si $a = 0$ ou 1, alors $\sqrt{a} = a = a^2 = a^3$
- Si $a \in]0 ; 1[$, alors $\sqrt{a} > a > a^2 > a^3$ (et même $\frac{1}{a} > \sqrt{a} > a > a^2 > a^3$)
- Si $a > 1$, alors $\sqrt{a} < a < a^2 < a^3$ (et même $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3$)

Remarque : l'inverse est la puissance -1 et la racine carrée est la puissance ½

Exemples :
Si $a = 0{,}1$. $a \in]0 ; 1[$
$\sqrt{a} \approx 0{,}316$. $a^2 = 0{,}01$. $a^3 = 0{,}001$. On a bien $\sqrt{a} > a > a^2 > a^3$

Si a = 4, a > 1. $\sqrt{a} = 2$; $a^2 = 16$ et $a^3 = 64$. On a bien $\sqrt{a} < a < a^2 < a^3$

Illustration graphique : On trace dans un repère orthonormal d'unité 5 cm les courbes représentatives des fonctions

Racine careée : $x \longmapsto \sqrt{x}$,
Identité : $x \longmapsto x$
Carré : $x \longmapsto x^2$
Cube : $x \longmapsto x^3$

Tableau de valeurs (arrondis à 0,01 près) :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,4	1,5	1,6	1,7	1,9	2
$\sqrt{x}$	0										1								
x	0										1								
x^2	0										1								
x^3	0										1