2^{nde} – Chapitre III – Résolutions d'équations à une inconnue

I- Généralités

Une équation :

inconnue — signe =

$$\underbrace{7x+3}_{1^{er}\text{ membre}} = \underbrace{3x-2}_{2^{nd}\text{ membre}}$$

Résoudre une équation d'inconnue x = déterminer l'ensemble des valeurs de x qui rendent l'égalité vraie. *(On note S cet ensemble)*

Equations équivalentes = Equations qui ont le même ensemble de solutions ($\Leftrightarrow$ se lit « équivaut à »)

Pour résoudre une équation, deux règles fondamentales :

Règle 1 : **On ne change pas l'ensemble des solutions d'une équation en additionnant ou soustrayant un même nombre à ses deux membres.**

Règle 2 : **On ne change pas l'ensemble des solutions d'une équation en multipliant ou divisant ses deux membres par un même nombre non-nul .**

Application à la résolution de l'équation :

$$\begin{aligned} -3x + 5 &= 2x - 6 \quad &(-2x-5)\\ -5x &= -11 \quad &(:(-5))\\ x &= \frac{11}{5} \end{aligned}$$

$S = \{\frac{11}{5}\}$

En général : pour résoudre une équation du type ax + b = cx + d, on fait :

1) Des additions ou soustractions sur les deux membres pour « rassembler les x dans un membre et les unités dans l'autre »

2) Une division par le coefficient de x (ici : −5)

On note S l'ensemble des solutions. Ici, S ne contient qu'un nombre : $\frac{11}{5}$ (noté entre accolades)

Une équation dont tous les nombres sont solutions :

$7x + 2 = 7x + 2$

est vraie quel que soit x.

On note $S = \mathbb{R}$ ensemble des réels

Une équation qui n'a aucune solution :

$$\begin{aligned} 5x - 2 &= 5x + 3 \quad &(-5x)\\ -2 &= 3 \end{aligned}$$

est faux quel que soit x.

On note $S = \varnothing$ ensemble vide

Application : Résoudre les équations (penser à développer et réduire les deux membres)

(E_1) $13 - x + 7 = 2x + 20 - 3x$

(E_2) $5x - 18 + x = 12 - 3x$

(E_3) $5x - 1 - (x - 4) + 3 = 4(x + 2)$

(E_4) $\frac{6x-1}{8} - \frac{3x-5}{12} = \frac{3x+6}{6}$

(E_5) $2x - 3(x + 1) = 1 - 2x$

(E_6) $(4x + 3)(x - 5) = (2x - 5)^2$

Solutions dans le désordre : $S = \varnothing$ $\quad S = \{\frac{10}{3}\}$ $\quad S = \{\frac{40}{3}\}$ $\quad S = \varnothing$ $\quad S = \mathbb{R}$ $\quad S = \{4\}$

II- Equations $x^2 = a$

- Si a < 0, cette équation n'a pas de solution parmi les nombres réels. $S = \varnothing$
- Si a = 0, $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Il y a une solution qui est 0. $S = \{0\}$
- Si a > 0, $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$. $S = \{-\sqrt{a}\,;\sqrt{a}\}$

Retenir aussi : **deux nombres ont le même carré si et seulement si ils sont égaux ou opposés.**

III- Equations-produits ou équations-quotients avec second membre nul :

Règle : $\boxed{A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0}$

Exemple : $(2x+5)(3-4x)=0 \Leftrightarrow 2x+5=0$ ou $3-4x=0$

$\Leftrightarrow 2x=-5$ ou $-4x=-3$

$\Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$ ou $x=\frac{3}{4}$ $\quad S=\{-\frac{5}{2};\frac{3}{4}\}$

Application : Résoudre les équations (au besoin : soustraire le second membre au premier pour avoir un second membre nul, et factoriser le 1^er^ membre)

$(E_7)\ (7x-21)(9x+81)=0$ $\quad (E_8)\ -12x(6x-5)(-x+4)=0$

$(E_9)\ 3x(x-1)-(2x+1)(x-1)=0$ $\quad (E_{10})\ (x+3)(3x-2)=(x+3)(2x-4)$

Solutions dans le désordre : $S=\{1\}$ $\quad S=\{-9;3\}$ $\quad S=\{-3;-2\}$ $\quad S=\{0;\frac{5}{6};4\}$

Règle : $\boxed{\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ et } B\neq 0}$

Exemple : résoudre $\frac{x^2-9}{x-3}=0$ $\quad$ cf. paragraphe avec « Valeurs interdites »

IV- Règle du produit en croix :

Pour tous nombres a, b, c, d tels que $b\neq 0$ et $d\neq 0$, on a $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$

Exemple : résoudre $\frac{x}{3}=\frac{x-2}{5}$

V - Equations avec valeurs « interdites »

Lorsque l'inconnue x figure au dénominateur, avant de résoudre, on doit exclure les valeurs de x qui annulent les dénominateurs (= valeurs interdites), et, après la résolution, ne pas garder les valeurs interdites dans l'ensemble des solutions.

Exemple 1 : $\frac{3}{x+2}=\frac{2}{x-7}\ (E_{11})$	Exemple 2 : $\frac{x^2-1}{(x+1)(x+3)}=0\ (E_{12})$
Valeurs interdites : $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ $x-7=0 \Leftrightarrow x=7$ On résout pour $x\neq -2$ et $x\neq 7$	Valeurs interdites : $(x+1)(x+3)=0 \Leftrightarrow x+1=0$ ou $x+3=0$ $\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=-3$ On résout pour $x\neq -1$ et $x\neq -3$
$(E_{11}) \Leftrightarrow 3(x-7)=2(x+2)$ *produit en croix* $(E_{11}) \Leftrightarrow 3x-21=2x+4$ $(E_{11}) \Leftrightarrow x=25$ Comme $25\neq -2$ et $25\neq -7$, $\boxed{S=\{25\}}$	$(E_{12}) \Leftrightarrow x^2-1=0\times(x+1)\times(x+3)$ $(E_{12}) \Leftrightarrow x^2-1=0$ $(E_{12}) \Leftrightarrow (x+1)(x-1)=0$ $(E_{12}) \Leftrightarrow x+1=0$ ou $x-1=0$ $(E_{12}) \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$ Comme -1 est « valeur interdite » $\boxed{S=\{1\}}$

Application : Résoudre les équations $(E_{13})\ \frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}=0$ $\quad (E_{14})\ \frac{9x^2-25}{(x+2)(3x+5)}=0$

$(E_{16})\ \frac{1}{x}=\frac{3}{x-2}$ $\quad (E_{17})\ \frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{x-5}{x^2-1}$ $\quad S=\{\frac{1}{2}\}$ $\quad S=\varnothing$ $\quad S=\{-5\}$ $\quad S=\{\frac{5}{3}\}$