2^{nde} - Chapitre II – Calcul littéral

I- Les formules

Développement $\longrightarrow$

Distributivité simple : $k (a + b) = ka + kb$

$k (a - b) = ka - kb$

Distributivité double : $(a + b) (c + d) = ac + ad + bc + bd$

Identités remarquables : $(a + b)^2 = a^2 + 2 ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2 ab + b^2$

$(a + b) (a - b) = a^2 - b^2$

$\longleftarrow$ Factorisation

Remarque : la distributivité double s'étend à tout produit dont les facteurs comptent plus de 2 termes. Exemple : $(a + b + c)(d + e) = ad + ae + bd + be +cd + de$

Cette formule serait difficile à employer dans le sens "factorisation" : on ne l'utilise que pour développer.

II- le vocabulaire

Somme = résultat d'une addition

Différence = résultat d'une soustraction

Les nombres additionnés dans une somme ou soustraits dans une différence s'appellent des **termes**.

Produit = résultat d'une multiplication.

Les nombres multipliés dans un produit s'appellent les **facteurs**.

Quotient = résultat d'une division

Développer = transformer un produit en une somme ou une différence

Factoriser = transformer une somme ou une différence en produit

III- Certains « pièges », ou erreurs fréquentes des élèves, en calcul littéral

1- La priorité de la puissance

Règle : la puissance est prioritaire sur les 4 opérations et signes +, –, × et ÷.

Par exemple, $-7^2 = -7 \times 7 = -49$ (la puissance porte sur le 7, pas sur le –.)

Mais $(-7)^2 = (-7)\times(-7) = +49$

Ne pas confondre $4x^2$ (seul le x est au carré) et $(4x)^2 = 16x^2$.

2- Le – devant une parenthèse ou une barre de fraction

Règle : quand une parenthèse est précédée d'un –, on l'ôte en changeant, dans la parenthèse, tous les + en – et tous les – en +.

Exemple : Factorisons $A = (x + 1) (2x - 3) - (x + 1) (- 7x + 1)$

$A = (x + 1)\ [\ 2x - 3 - (-7x + 1)\ ]$ (on doit garder la parenthèse car $(-7x+1)$ est précédé d'un $-$)
$A = (x + 1)\ [\ 2x - 3 + 7x - 1\ ]$ (on ôte la parenthèse en changeant les signes)
$\boxed{A = (x + 1)(9x - 4)}$

Une barre de fraction se comporte comme une parenthèse. Si elle est précédée d'un $-$, il faudra changer tous les signes + en $-$ et les signes $-$ en + au numérateur.

Réduisons $B = \dfrac{x - 4}{3} - \dfrac{2x + 3}{6}$ au même dénominateur.

$B = \dfrac{(x - 4)\times 2}{3\times 2} - \dfrac{2x + 3}{6}$

$B = \dfrac{2x - 8}{6} - \dfrac{2x + 3}{6}$

$B = \dfrac{2x - 8 - 2x - 3}{6}$ Le $-$ « passe » au numérateur. On change les signes.

$B = \boxed{-\dfrac{11}{6}}$

3- Le facteur 1 ou -1 caché

Factorisons :
$C = (2x + 3)(x - 7) + 2x + 3$
$C = (2x + 3)(x - 7) + (2x + 3)\times 1$ (facteur 1 « caché »)
$C = (2x + 3)(x - 7 + 1)$
$\boxed{C = (2x + 3)(x - 6)}$

$D = (3 - 2x)^2 - 2x + 3 - (3 - 2x)(x - 2)$
$D = (3 - 2x)^2 + (3 - 2x)\times 1 - (3 - 2x)(x - 2)$
$D = (3 - 2x)\ [\ 3 - 2x + 1 - (x - 2)\ ]$
$D = (3 - 2x)(4 - 2x - x + 2)$
$D = (3 - 2x)(-3x + 6)$
$D = (3 - 2x)(3 \times (-x) + 3 \times 2)$
$D = \boxed{3(3 - 2x)(-x + 2)}$

4- Reconnaître des facteurs égaux ou opposés.

Egaux : $-a + b = b - a$ $a - b = -b + a$
Opposés : $-a + b$ ou $b - a$ sera l'opposé de $a - b$ ou de $-b + a$

Par exemple, on veut factoriser $E = (x - 2)(x + 4) - 3(2 - x)$

On repère que $x - 2$ et $2 - x$ sont opposés.
Comme soustraire un nombre = additionner son opposé, on peut remplacer $-3(2 - x)$ par $+3(x - 2)$

$E = (x - 2)(x + 4) + 3(x - 2)$

$E = (x - 2)(x + 4 + 3)$
$E = (x - 2)(x + 7)$

Propriété importante : **un nombre et son opposé ont le même carré.**

Exemple $(-4)^2 = 16 = 4^2$

C'est utile, par exemple, pour factoriser $F = (7 - x)^2 - (x - 7)(x + 3)$
On sait que $(7 - x)$ et $(x - 7)$ sont opposés, donc ont le même carré.
On peut donc remplacer $(7 - x)^2$ par $(x - 7)^2$
$F = (x - 7)^2 - (x - 7)(x + 3)$
$F = (x - 7)(x - 7 - (x + 3))$
$F = (x - 7)(x - 7 - x - 3)$
$\boxed{F = -10(x - 7)}$

IV- Les valeurs interdites.

Définition : On a vu qu'on pouvait diviser par tous les nombres réels sauf 0. Dorénavant, lorsque vous rencontrerez une expression avec une lettre dans ses dénominateurs, il faudra déterminer les **valeurs interdites**, c'est-à-dire les valeurs de la lettre qui annulent les dénominateurs, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles l'expression n'existe pas.

Exemple : on donne une expression $G(x) = \dfrac{1}{2x + 6} - \dfrac{3x - 1}{x - 4}$
Avant de commencer tout calcul, on détermine les valeurs interdites.

Recherche des valeurs interdites (= les valeurs de x qui annulent les dénominateurs) :

$2x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -6 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = -3}$

$x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = 4}$

L'expression G(x) existe donc pour tout x différent de -3 et de 4.
x devra appartenir à l'ensemble $\mathbb{R} - \{-3 ; 4\}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{-3 ; 4\}$
En français : « l'ensemble des réels privé de -3 et 4 »

Application : faire les exercices 11 et 12 p 116 du livre, en ayant au préalable déterminé les valeurs interdites des expressions.