2^{nde} – Chapitre I – Calcul numérique

I- Calcul frationnaire

1- Définition d'une fraction.

On appelle **fraction** le quotient d'un nombre <u>entier</u> par un nombre <u>entier</u> non nul[1].

Pour les écritures du type $\frac{a}{b}$, où a et b ne sont pas toujours des entiers, on parle d'**écritures fractionnaires**.

 b est toujours non nul ! Car ***on ne peut pas diviser par zéro***. 

<u>Exemples</u> : $\frac{13}{15}$; $\frac{-12}{18}$ sont des fractions. $\frac{12{,}6}{15{,}99}$ ou $\frac{2+\sqrt{5}}{4}$ sont des écritures fractionnaires autres que des fractions.

2- Règle fondamentale

<u>Règle</u> : **on ne change pas la valeur d'une écriture fractionnaire lorsqu'on multiplie ou divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.**

<u>Rappel</u> : $\frac{\text{numérateur}}{\text{dénominateur}}$

Cette règle sert entre autres à simplifier des fractions ou à réduire plusieurs fractions au même dénominateur.

3- Additionner ou soustraire des fractions.

Méthode : **Pour additionner ou soustraire des fractions, on les réduit au même dénominateur, puis on effectue les additions/soustractions sur les numérateurs.**

<u>Exemple</u> : $\frac{3}{10}-\frac{7}{15}+\frac{5}{6}=\frac{3\times 3}{10\times 3}-\frac{7\times 2}{15\times 2}+\frac{5\times 5}{6\times 5}=\frac{9}{30}-\frac{14}{30}+\frac{25}{30}=\frac{20}{30}=\boxed{\frac{2}{3}}$

 Il est formellement interdit d'additionner ou de soustraire entre eux des dénominateurs.

4- Multiplier des fractions.

<u>Méthode</u> : **pour multiplier des fractions entre elles :**

1. **On décompose le produit des numérateurs et des dénominateurs**
2. **On simplifie**
3. **On effectue le produit des numérateurs et des dénominateurs**

<u>Remarque</u> : s'il y a des signes –, on commence, avant tout, par déterminer le signe du produit.

---

[1] Non nul signifie différent de zéro.

Exemple : $\dfrac{-6}{14} \times \dfrac{21}{-15} \times \dfrac{9}{-12} = -\dfrac{3 \times 2 \times 3 \times 7 \times 3 \times 3}{2 \times 7 \times 3 \times 5 \times 3 \times 2 \times 2} = \boxed{-\dfrac{9}{20}}$

5- Diviser par une fraction.

Méthode : **pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse.**

Définition : **L'inverse** d'un nombre non nul x est le nombre par lequel il faut multiplier x pour obtenir 1.

En pratique : **- si x est un nombre non nul, son inverse est $\dfrac{1}{x}$.**

- **Si a et b sont deux nombres non nuls, l'inverse de $\dfrac{a}{b}$ est $\dfrac{b}{a}$**

Exemple : $\dfrac{13}{2} : \dfrac{26}{5} = \dfrac{13}{2} \times \dfrac{5}{26} = \dfrac{13 \times 5}{2 \times 2 \times 13} = \boxed{\dfrac{5}{4}}$

Remarque importante : ***la position de la barre de fraction*** par rapports aux = et aux signes opératoires est ***primordiale***.

Exemple : $\dfrac{\frac{3}{5}}{2} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{3}{10}}$ mais $\dfrac{3}{\frac{5}{2}} = 3 \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{1} \times \dfrac{2}{5} = \boxed{\dfrac{6}{5}}$

⚠ Ne pas confondre **inverse** et **opposé** : l'inverse de 4 est $\dfrac{1}{4}$, son opposé est -4.

Le produit de deux inverses vaut 1. La somme de deux opposés vaut 0.

II- Puissances

1- Définition.

Définition de la puissance positive : pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$a^n = a \times a \times \ldots\ldots \times a$$ (produit de n facteurs égaux à a)

Définition de la puissance négative : pour tous $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Remarque : on ne peut pas calculer une puissance négative de 0 car 0 n'a pas d'inverse (car on ne peut pas diviser par 0). C'est pourquoi $a \in \mathbb{R}^*$ dans le cas de la puissance négative.

Puissances particulières :

Puissance zéro : $a^0 = 1$ pour tout nombre a (même zéro) par convention.

La puissance 1 est l'identité : pour tout nombre a , $a^1 = a$

La puissance 2 s'appelle **le carré** et la puissance 3 **le cube**.

La puissance –1 est **l'inverse** : pour tout nombre a non nul, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

Puissances de 10 ($n \in \mathbb{N}^*$):

$10^n = 1\,0 \ldots.0$ avec n zéros après le 1

$10^{-n} = 0,\,0\ldots01$, où le 1 est à la nième place après la virgule.

2- Règles de calcul

Les 5 règles de calcul : a et b sont des réels (non nuls lorsqu'ils figurent au dénominateur)
m et n sont des entiers relatifs ($\in \mathbb{Z}$)

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a^n)^m = a^{n\times m}$$

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$ ***La puissance est distributive par rapport à la multiplication.***

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ***La puissance est distributive par rapport à la division..***

Exemple d'application courante des 3 premières règles. Calcul type Brevet :
Calculer A. Donner le résultat sous la forme $a.10^p$, a et p étant entiers, et a aussi petit que possible.

$$A = \frac{12 \times 10^{-9} \times 5 \times (10^2)^3}{24 \times 10^{-2}} \qquad A = \frac{12 \times 5}{24} \times \frac{10^{-9} \times (10^2)^3}{10^{-2}} \qquad A = \frac{12 \times 5}{12 \times 2} \times \frac{10^{-9} \times 10^6}{10^{-2}}$$

$$A = \frac{5}{2} \times \frac{10^{-3}}{10^{-2}} \qquad A = 2{,}5 \times 10^{-3-(-2)} \qquad A = 25 \times 10^{-1} \quad \times \quad 10^{-1} \qquad A = 25 \times 10^{-2}$$

Applications des règles de distributivité :

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$ $\qquad (5x)^2 = 5^2 \times x^2 = 25\, x^2$ pour tout x réel.

3- Priorités

⚠ La puissance est prioritaire sur les signes $+ - \times /$.

Ne confondez pas $-\, 7^2 = -\, (7 \times 7) = -\, 49$ (la puissance porte sur le 7 mais pas le –)
avec $(-\, 7)^2 = (-\, 7) \times (-\, 7) = +\, 49$ (les parenthèses permettent d'inclure le – dans la puissance)

De même, il ne faut pas confondre $5x^2$ avec $(5x)^5 = 25x^2$

Exercices dans Indice 2^nde 1998 : 31, 32, 33 p 22. 71 p 27.

Exercices sur les écritures scientifiques : 34, 35, 43,44,45 p 22 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53 p 23 (avec conversions d'unités)

4- Ecriture scientifique.

Tout nombre décimal différent de zéro admet une écriture scientifique, c'est-à-dire sous la forme $\pm\, a \times 10^n$, où n est un entier relatif et a un nombre compris dans l'intervalle [1 ; 10 [

L'intervalle [1 ; 10 [= l'ensemble des nombres compris entre 1 et 10, 1 inclus, 10 exclu.

Nombre décimal : voir le chapitre « les ensembles des nombres ».

III- Racines carrées

1- Définition

Définition : a est un réel positif (on note $a \in \mathbb{R}_+$)
La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré est a.

Remarques : Tout nombre positif est le carré de 2 nombres : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemple : $9 = 3^2$ et $9 = (-3)^2$ La racine carrée de 9 est 3, celui des deux qui est positif.

L'équation $x^2 = 9$ admet donc deux solutions : $\sqrt{9} = 3$ et $-\sqrt{9} = -3$

Cas de 0 : $\sqrt{0} = 0$ 0 est le carré de lui-même uniquement.

Quant aux nombres négatifs, leur racine carrée n'est pas définie (= n'existe pas), car le carré de tout nombre réel est un nombre positif d'après la règle des signes.

Règles de calcul : **La racine carrée est distributive par rapport à la multiplication et à la division : Pour tous nombres a et b réels (b étant non nul s'il figure au dénominateur) :**

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Pour les curieux : la racine carrée est la puissance $\frac{1}{2}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ (on n'a étudié pour l'instant que les puissances entières). C'est pourquoi elle a les mêmes propriétés que les puissances.

Un classique du calcul sur les radicaux (Brevet) :

Ecrire B sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant l'entier positif plus petit possible.

$B = \sqrt{500} - 7\sqrt{45} - \sqrt{80}$

Méthode : décomposer les nombres sous les racines en produits contenant des carrés parfaits. Le facteur restant dans le produit doit être le même sous chaque racine.

$B = \sqrt{500} - 7\sqrt{45} - \sqrt{80}$

$B = \sqrt{5 \times 100} - 7 \times \sqrt{5 \times 9} - \sqrt{5 \times 16}$

$B = \sqrt{5} \times \sqrt{100} - 7 \times \sqrt{5} \times \sqrt{9} - \sqrt{5} \times \sqrt{16}$ (distributivité de la racine p/r à la multiplication)

$B = \sqrt{5} \times 10 - 7 \times \sqrt{5} \times 3 - \sqrt{5} \times 4$

$B = 10\sqrt{5} - 21\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$

$B = -15\sqrt{5}$

Exercices dans Indice 2^nde 1998 : 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42 p 22.