2^{nde} – Activité préparatoire à la résolution de systèmes par combinaisons linéaires.

Partie I : Opérations sur les lignes d'un système.

On numérote les lignes d'un système en les nommant L_1, L_2 …

On donne les systèmes : $(S_1)\left\{\begin{array}{ll} 3x - y = -3 & L_1 \\ 9x + 2y = -24 & L_2 \end{array}\right.$ $\qquad (S_2)\left\{\begin{array}{ll} x + y + z = 4 & L_1 \\ 2x + y - z = -5 & L_2 \\ -x + 2y + z = 0 & L_3 \end{array}\right.$

Théorème 1 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'un système si l'on échange deux de ses lignes.

Ex : $(S_1)\left\{\begin{array}{ll} 3x - y = -3 & L_1 \\ 9x + 2y = -24 & L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} 9x + 2y = -24 & L_1 \leftarrow L_2 & \text{on remplace } L_1 \text{ par } L_2 \\ 3x - y = -3 & L_2 \leftarrow L_1 & \text{on remplace } L_2 \text{ par } L_1. \end{array}\right.$

Théorème 2 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'un système si on multiplie l'une de ses lignes par un nombre non nul.

Ex : $(S_1)\left\{\begin{array}{l} 3x - y = -3 \\ 9x + 2y = -24 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} 6x - 2y = -6 & L_1 \leftarrow 2L_1 & \text{on remplace } L_1 \text{ par } 2L_1 \\ 3x + \frac{2}{3}y = -8 & L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 & \text{on remplace } L_2 \text{ par } \frac{1}{3} \text{ de } L_2 \end{array}\right.$

Faire une combinaison linéaire des lignes L_1 et L_2 dans (S_1), c'est calculer $a\,L_1 + b\,L_2$ où a et b sont des nombres réels.

Exemple : $2L_1 + 3L_2$ pour (S_1) donne : $2 \times (3x - y) + 3 \times (9x + 2y) = 2 \times (-3) + 3\times(-24)$
soit : $6x - 2y + 27x + 6y = -6 - 72$
soit : $\boxed{33x + 4y = -78}$

Pour plus de clarté, on peut compter séparément les x, les y et le second membre :

$\left.\begin{array}{ll} \text{Pour les x :} & 2\times3x + 3\times9x = 6x + 27x = 33x \\ \text{Pour les y :} & 2\times(-y) + 3\times2y = -2y + 6y = -4y \\ \text{Pour le second membre :} & 2 \times (-3) + 3 \times (-24) = -6 - 72 = -78 \end{array}\right\}$ opérations effectuées mentalement ou à part

Calculez de la même manière, pour (S_1) :

$L_1 + 2L_2$: …………………………………………………………

$4L_1 - 2L_2$: …………………………………………………………

$3L_1 - L_2$: ……………………………………………………………… Intérêt : …………

$2L_1 + L_2$: ……………………………………………………………… Intérêt : …………

Et pour (S_2) :

$2L_1 - L_2$: ……………………………………………………………… Intérêt : …………

L_1+L_3 : ………………………………………………………………… Intérêt : …………

Théorème 3 : on ne change pas l'ensemble des solutions d'un système lorsqu'on remplace une de ses lignes par une combinaison linéaire d'elle-même avec une autre des lignes du système.

(En prenant soin que le coefficient de la ligne remplacé dans la combinaison ne soit pas 0. Par exemple, si on remplace L_1 par $aL_1 + bL_2$, il faut que $a \neq 0$)

Ce théorème nous sert à raisonner par systèmes équivalents (= de même ensemble de solutions) dans une résolution par combinaisons linéaires, tout en faisant « disparaître » certaines variables dans certaines lignes.

Partie II - Résolutions guidées de systèmes :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ll} 3x - y = -3 & L_1 \\ 9x + 2y = -24 & L_2 \end{array}\right. \qquad (S_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots & L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots & L_2 \leftarrow 3L_1 - L_2 \end{array}\right.$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \qquad \boxed{S = \{\ (\ \ldots\ ;\ \ldots\ )\ \}}$$

Vérifiez que la solution trouvée convient : $3 \times \ldots. - \ldots.. = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. = \ldots\ldots\ldots$

$9 \times \ldots. + 2 \times \ldots. = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots.$

$$(S_2)\left\{\begin{array}{ll} x + y + z = 4 & L_1 \\ 2x + y - z = -5 & L_2 \\ -x + 2y + z = 0 & L_3 \end{array}\right. \qquad (S_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots & L_1 \leftarrow L_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots & L_1 \leftarrow L_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots & L_2 \leftarrow L_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots & L_3 \leftarrow 3L_2 + L_3 \end{array}\right.$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. = \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. = \ldots\ldots.. \\ z = \ldots.. \end{array}\right.$$

calculez d'abord
z dans L_3 et remplacez z
par sa valeur dans L_1 et L_2

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y = \ldots.. \\ -y = \ldots\ldots\ldots \\ z = \ldots\ldots. \end{array}\right. \qquad (S_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + \ldots = \ldots. \\ y = \ldots. \\ z = \ldots \end{array}\right.$$

calculez d'abord y dans L_2
puis remplacez y par sa valeur dans L_1.

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots \\ z = \ldots\ldots \end{array}\right. \qquad \boxed{S = \{\ (\ \ldots..\ ;\ \ldots..\ ;\ \ldots..)\ \}}$$

Vérifiez que la solution trouvée convient : $\ldots\ldots. + \ldots\ldots. + \ldots\ldots. = \ldots\ldots.$

$2 \times \ldots.. + \ldots.. - \ldots\ldots.. = \ldots\ldots.$

$- \ldots\ldots + 2 \times \ldots.. + \ldots.. = \ldots\ldots.$

Résolvons $(S_3)\left\{\begin{array}{ll} 4x - y = 23 & L_1 \\ 6x + 3y = 21 & L_2 \end{array}\right.$ $\qquad (S_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \ldots\ldots. = \ldots\ldots. & L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \text{ suppression de } y \\ \ldots\ldots.. = \ldots\ldots & L_2 \leftarrow 3L_1 - 2L_3 \text{ suppression de } x \end{array}\right.$

$(S_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ldots.. \\ y = \ldots\ldots \end{array}\right.$ $\qquad \boxed{S = \{\ (\ \ldots\ ;\ \ldots\ )\ \}}$ $\qquad$ Vérification : $\left\{\begin{array}{l} 4 \times \ldots - \ldots = \ldots. \\ 3\times\ldots + 3 \times \ldots = \ldots.. \end{array}\right.$

Partie III – Choix les combinaisons linéaires

$(S_4)\begin{cases} 9x - 4y = 11 & L_1 \\ 3x + 2y = 17 & L_2 \end{cases}$ $(S_4) \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots & L_1 \leftarrow \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & L_2 \leftarrow \ldots\ldots\ldots \end{cases}$ $(S_4) \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$ **S = { (…. ; ….) }**	Pour faire « disparaître » y : il suffit de multiplier, dans L_2, 2y par 2, et de les <u>additionner</u> aux −4y de L_1. Cela fera 0y. On remplace donc L_1 par …………………… Pour faire « disparaître » x : il suffit de multiplier, dans L_2, 3x par 3, et de les <u>soustraire</u> aux 9x de L_1. Cela fera 0x. On remplace donc L_2 par …………………… <u>Remarque</u> : Lorsque les <u>coefficients</u> sont <u>de même signe</u> : - On les rend égaux par une ou des multiplications - On fait une <u>soustraction</u> (ex : pour 9x et 3x, 9 et 3 sont de même signe) Lorsque les <u>coefficients</u> sont <u>de signes contraires</u> : - On les rend opposés par une ou des multiplications - On fait une <u>addition</u> (ex : pour −4y et 2y, −4 et 2 sont de signe s contraires)

$(S_5)\begin{cases} 6x + 5y = -10 & L_1 \\ -8x + 3y = -6 & L_2 \end{cases}$ $(S_5) \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots & L_1 \leftarrow \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & L_2 \leftarrow \ldots\ldots\ldots \end{cases}$ $(S_5) \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$ **S = { (…. ; ….) }**	<u>Pour faire « disparaître » y</u> : Le PPCM de 5 et 3 étant 15, on multiplie L_1 par 3 pour avoir 15y, L_2 par 5, puis on <u>soustrait</u>. On remplace donc L_1 par …………………… <u>Pour faire « disparaître » x</u> : Le PPCM de 6 et 8 étant 24, on multiplie L_1 par 4 pour avoir 24x, L_2 par 3 pour avoir – 24x, puis on les <u>additionne</u>. On remplace donc L_2 par ……………………

A vous « tout seuls » :

$(S_6)\begin{cases} 3x - y = 8 & L_1 \\ 2x = 3y = 42 & L_2 \end{cases}$	$(S_7)\begin{cases} 10x - 3y = -46 & L_1 \\ -5x - 6y = 8 & L_2 \end{cases}$	$(S_8)\begin{cases} 4x - y = -4 \\ 6x + y = 4 \end{cases}$
$(S_6) \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots & L_1 \leftarrow \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & L_2 \leftarrow \ldots\ldots\ldots \end{cases}$	$(S_7) \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots & L_1 \leftarrow \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & L_2 \leftarrow \ldots\ldots\ldots \end{cases}$	$(S_8) \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots & L_1 \leftarrow \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & L_2 \leftarrow \ldots\ldots\ldots \end{cases}$
$(S_6) \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$	$(S_7) \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$	$(S_8) \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$
S = { (…. ; ….) }	**S = { (…. ; ….) }**	**S = { (…. ; ….) }**

Résoudre aussi : $(S_9)\begin{cases} 2x - 6y = 4 \\ -3x + 9y = 10 \end{cases}$ et $(S_{10})\begin{cases} 3x - 6y = 18 \\ -x + 2y = -6 \end{cases}$