2nde – Activité d'introduction aux équations de droites

Partie 1 : Ensemble des points dont les coordonnées vérifient une équation

1) Tracer sur votre cahier un repère orthonormal[1] d'origine O et d'unité 1 cm ou 1 grand carreau.
Appelez le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ où I est le point de coordonnées (1 ; 0) et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ où J est le point de coordonnées (0 ; 1)[2]

2) Tracer en rouge l'ensemble (d_1) des points du plan de coordonnées (x,y) tel que x = 5.
(C'est-à-dire l'ensemble des points du plan d'abscisse 5)

3) Tracer en bleu l'ensemble (d_2) des points du plan de coordonnées (x,y) tel que y = – 2.
(C'est-à-dire l'ensemble des points du plan d'ordonnée –2.)

On nomme A le point d'intersection de (d_1) et (d_2). Quelles sont les coordonnées de A ?

(d_1) est la droite d'équation $x = 5$ et (d_2) la droite d'équation $y = - 2$

4) On souhaite tracer l'ensemble (d_3) des points du plan de coordonnées (x,y) tels que $y = 2x - 3$.

Compléter ce tableau qui rassemble les coordonnées de certains des points de (d_3) :
(certains calculs sont à faire à part pour pouvoir le remplir)

x	– 3	– 2	0	2				
y = 2x – 3					0	3	5	–9

Placer ces points dans le repère. Que constatez-vous ? Que pensez-vous qu'est (d_3) ? Tracez (d_3) en vert.

(d_3) est la droite d'équation $y = 2x - 3$

5) On souhaite tracer l'ensemble (d_4) des points du plan de coordonnées (x,y) tels que $x + 2y - 4 = 0$.

Compléter ce tableau qui rassemble les coordonnées de certains des points de (d_4) :

x	– 5	– 3	– 1	0				
y					0	1,5	– 2	–3

Placer ces points dans le repère. Que constatez-vous ? Que pensez-vous qu'est (d_4) ? Tracez (d_4).

(d_4) est la droite d'équation $x + 2y - 4 = 0$

Partie 2 : Equation cartésienne et équation réduite de droite

Théorème : On admet que toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, et réciproquement : que pour toute équation de la forme $ax + by + c = 0$, l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient cette équation est une droite. (a, b, c sont des coefficients réels)

Une telle équation est une équation cartésienne de droite.

[1] Un repère est dit orthogonal lorsque ses deux axes sont perpendiculaires.
Un repère est dit orthonormal ou orthonormé lorsque ses deux axes sont perpendiculaires et que l'unité est la même sur les deux axes.
[2] La première coordonnée s'appelle l'abscisse et se lit sur l'axe des abscisses (horizontal) et la seconde l'ordonnée, et se lit sur l'axe des ordonnées.

Théorème : Les droites du plan parallèles à l'axe des ordonnées admettent une équation réduite de la forme $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$)
Les autres admettent toutes une équation réduite de la forme $y = mx + p$ ($(m, p) \in \mathbb{R}^2$)

Cas particuliers :

- si $m = 0$, l'équation $y = mx + p$ devient $\boxed{y = p}$, qui est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.
- Si $p = 0$, l'équation $y = mx + p$ devient $\boxed{y = mx}$, qui est l'équation d'une droite passant par l'origine du repère.

Toute droite du plan admet des équations cartésiennes et une équation réduite.

Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), tracer :

- La droite (d_1) d'équation cartésienne (E_1) $x - 3y + 6 = 0$. (il suffit d'en déterminer 2 points)
- La droite (d_2) d'équation cartésienne (E_2) $-2x + 6y - 12 = 0$.
- La droite (d_3) d'équation réduite (E_3) $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Que constatez-vous ? (E_1), (E_2) et (E_3) sont donc des équations de la même droite.
Prouver que ces 3 équations sont équivalentes.

Remarque : 2 équations cartésiennes de la même droite ont des coefficients proportionnels.

Trouver l'équation réduite de chacune des droites suivantes (sans les tracer) :
(d_1) d'équation $x - 3y + 9 = 0$ **(d_2) d'équation $-3x - y + 4 = 0$** **(d_3) d'équation $6x + 2y - 5 = 0$**
(d_4) d'équation $7x - 14 = 0$ **(d_5) d'équation $4y + 12 = 0$**

Partie III – Coefficient directeur et ordonnée à l'origine.

Définition : lorsqu'une droite admet pour équation réduite $y = ax + b$,
a est son **coefficient directeur**
b est son **ordonnée à l'origine**.

Dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), tracer la droite (D) d'équation réduite $y = 3x - 1$.
Quel est son coefficient directeur ? ………….. Quelle est son ordonnée à l'origine ? ……….
On nomme A le point d'intersection de (D) avec l'axe des ordonnées et B le point d'intersection de (D) avec l'axe des abscisses.
Déterminer les coordonnées de A et de B.

Etablir une règle : Si une droite a pour équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$), elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée …….. et l'axe des abscisses au point d'abscisse ……. .*

* C'est la valeur pour laquelle $ax + b = 0$ vue dans les tableaux de signe.

En utilisant cette règle, tracer la droite (D') d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Lorsque son coefficient directeur est strictement positif, la droite « monte » de gauche à droite.
Lorsque son coefficient directeur est égal à zéro, la droite est « horizontale »
Lorsque son coefficient directeur est strictement négatif, la droite « descend » de gauche à droite.

En partant d'un point quelconque de (D), quand on se déplace de 1 de gauche à droite en abscisse, de combien « monte »-t-on en ordonnée ? ………. Et quand on se déplace de 2 ? ………
En partant d'un point quelconque de (D'), quand on se déplace de 1 de gauche à droite en abscisse, de combien « descend »-t-on en ordonnée ? ………….. Et quand on se déplace de 2 ? ………

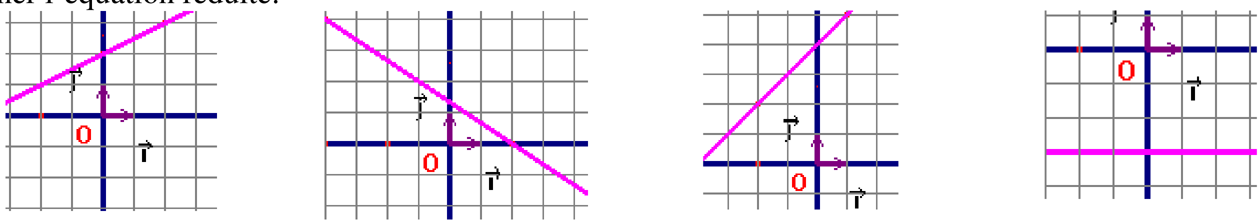
Le **coefficient directeur** est un indice de pente : s'il est positif, on « monte », s'il est négatif, on « descend ».
Sa valeur correspond à « de combien on monte ou on descend » en ordonnée quand on « avance » de 1 en abscisse.

Ou encore au rapport : $\dfrac{\text{de combien on monte ou descend en ordonnée}}{\text{de combien on « avance » en abscisse}}$.

En particulier, si une droite passe par 2 points A (x_A ; y_A) et N (x_B ; y_B) n'ayant pas la même abscisse,

le **coefficient directeur de (AB)** se calcule par $\boxed{\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$

Lecture graphique : lire l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur de chacune de cas droites et en donner l'équation réduite.



Tracer dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) les droites ;
(d_1) d'équation y = 2x – 5
(d_2) : passant par A (3 ; 2) et de coefficient directeur – 1.
(d_3) : passant par B (– 3 ; 4) et de coefficient directeur $-\dfrac{1}{3}$
(d_4) : passant par C (– 1 ; – 2) et de coefficient directeur $\dfrac{3}{4}$.

Partie 4 : déterminer l'équation réduite d'une droite passant par deux points A et B.

A et B ont-ils la même abscisse ?

oui ↓

(AB) est parallèle
à l'axe des ordonnées
↓
Son équation est de

la forme x = c
↓
Comme A ∈ (AB)
Une équation de (AB)
est $x = x_A$. (ou $x = x_B$)

non ↓

Alors (AB) admet une équation de la
forme y = mx + p
↓
On calcule $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
↓
Sachant m, on calcule p
avec $y_A = m\, x_A + p$
ou $y_B = m\, x_B + p$
↓
L'équation réduite de (AB)
est y = mx + p

Ainsi, déterminez les équations réduites des droites (AB), (BC), (CD) et (DA)
sachant que A (3 ; – 1) B (–2 ; – 1) C (– 4 ; 5) et D (– 4 ; – 2)

(Vous pouvez les tracer pour vérifier la vraisemblance de vos résultats)