1S - Exercices sur : schéma de Bernoulli. Loi binomiale

Corrigés

Exercice 1 : X est une variable aléatoire dont la probabilité suit la loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,2$.

1) $P(X=4)=\binom{10}{4}\times 0,2^4\times 0,8^6=210\times 0,2^4\times 0,8^6$ $\boxed{P(X=4)\approx 0,088}$

$P(X=0)=0,8^{10}$ $\quad P(X=1)=10\times 0,2\times 0,8^9$ $\quad P(X=2)=\binom{10}{2}\times 0,2^2\times 0,8^8=45\times 0,2^2\times 0,8^8$

$P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$P(X\leqslant 2)=0,8^{10}+10\times 0,2\times 0,8^9+45\times 0,2^2\times 0,8^8$ $\boxed{P(X\leqslant 2)\approx 0,678}$

2) On calcule :

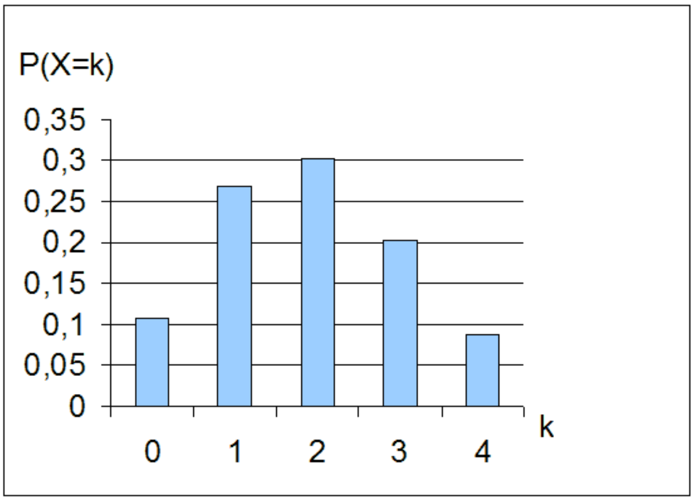
$P(X=0)=0,8^{10}$ $\quad P(X=0)\approx 0,107$

$P(X=1)=10\times 0,2\times ,8^9$ $\quad P(X=1)\approx 0,268$

$P(X=2)=45\times 0,2^2\times 0,8^8$ $\quad P(X=2)\approx 0,302$

$P(X=3)=120\times 0,2^3\times 0,8^7$ $\quad P(X=3)\approx 0,201$

Et on sait déjà que $P(X=4)\approx 0,088$



Exercice 2 : 1) X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{4}$ car on répète 10 fois et de manière indépendante la même expérience qui consiste à tirer une carte et à considérer si l'événement « obtenir un trèfle » est réalisé, événement qui a une probabilité de $\frac{1}{4}$ de se produire car 8 cartes sur 32 sont des trèfles dans un jeu de 32 cartes. On est donc dans un schéma de Bernoulli de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{4}$ et la variable X dénombre le nombre de « succès » : « obtenir un trèfle ».

2) $P(X=4)=\binom{10}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\times\left(\frac{3}{4}\right)^6=210\times\frac{3^6}{4^{10}}$ $\boxed{p(X=4)\approx 0,146}$

3) $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ $\boxed{P(X\geqslant 1)\approx 0,944}$

Exercice 3 :

Dans un jeu de 52 cartes, il y a 4 valets. Donc à chaque tirage, la probabilité d'obtenir un valet est de $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.

Comme on effectue 12 tirages avec remise, on est dans le cadre d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n=12$ et $p=\frac{1}{13}$.

Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de valets tirés lors des 12 tirages. X suit une loi binomiale de paramètres $n=11$ et $p=\frac{1}{13}$. $P(X=3)=\binom{12}{3}\times\left(\frac{1}{13}\right)^3\times\left(\frac{12}{13}\right)^9=220\times\frac{12^9}{13^{12}}$

La probabilité de tirer exactement 3 valets est : $\boxed{P(X=3)\approx 0{,}049}$

Exercice 4 : À chaque tirage, on a une probabilité de $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ de tirer une boule bleue.

On répète 6 fois le même tirage, de manière indépendante (puisqu'il y a remise), et on considère à chaque fois l'événement « obtenir une boule bleue » dont le succès a une probabilité de $\frac{1}{4}$. On est dans un schéma de Bernoulli de paramètres $n=6$ et $p=\frac{1}{4}$. X donne le nombre de fois où, sur les 6 tirages, on obtient une boule bleue. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=\frac{1}{4}$.

$P(X\geqslant 5)=P(X=5)+P(X=6)$ $\quad$ $P(X=5)=6\times\left(\frac{1}{4}\right)^5\times\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{18}{4^6}$ $\quad$ $P(X=6)=\left(\frac{1}{4}\right)^6=\frac{1}{4^6}$

Donc $P(X\geqslant 5)=\frac{18}{4^6}+\frac{1}{4^6}=\frac{19}{4^6}$ $\quad$ La probabilité de tirer au moins 5 boules bleues est de $\boxed{P(X\geqslant 5)\approx 0{,}002}$

Exercice 5 : À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est de $\frac{1}{2}$.

On effectue 8 lancers indépendants et on considère à chaque lancer l'événement « succès » : « obtenir pile », qui a une probabilité de réalisation de $\frac{1}{2}$. On est dans un schéma de Bernoulli de paramètres $n=8$ et $p=\frac{1}{2}$.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de « pile » obtenus sur les 8 lancers.

X suit une loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=\frac{1}{2}$.

La probabilité pour obtenir exactement 5 piles sur les 8 lancers est :

$P(X=5)=\binom{8}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=56\times\frac{1}{2^8}=\frac{7}{2^5}$ $\quad$ $\boxed{P(X=5)\approx 0{,}219}$

Exercice 6 : À chaque lancer du dé, on a une probabilité de $\frac{1}{3}$ d'obtenir un multiple de 3 (car on a 2 multiples de 3 sur 6 issues équiprobables).

On effectue 15 lancers indépendants, notant à chaque fois la réalisation de l'événement « obtenir un multiple de 3 », qui a une probabilité de $\frac{1}{3}$. On est dans un schéma de Bernoulli de paramètres $n=15$ et $p=\frac{1}{3}$.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de multiples de 3 obtenus sur 15 lancers. X suit une loi binomiale de paramètres $n=15$ et $p=\frac{1}{3}$.

$P(X=7)=\binom{15}{7}\times\left(\frac{1}{3}\right)^7\times\left(\frac{2}{3}\right)^8=\frac{6435\times 2^8}{3^{15}}$

La probabilité d'obtenir exactement 7 multiples de 3 sur les 15 lancers est de $\boxed{P(X=7)\approx 0{,}115}$.