1ère S 2011. Problèmes sur la Dérivation et ses applications. Corrigés.

Exercice 1 : 1) Pour tout x ∈ ℝ, $f(x)=x^2$ et $g(x)=x^2+2x+3$.
f et g sont dérivables sur ℝ et on a, pour tout x ∈ ℝ, $f'(x)=2x$ et $g'(x)=2x+2$.

a) Une équation de la tangente (T_a) à la courbe représentative de f (P_1) en son point d'abscisse a est :
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$, soit $y=2a(x-a)+a^2$, soit $y=2ax-2a^2+a^2$, soit $\boxed{y=2ax-a^2}$.

b) Une équation de la tangente (T_b) à la courbe représentative de g (P_2) en son point d'abscisse b est :
$y=g'(b)(x-b)+g(b)$, soit $y=(2b+2)(x-b)+b^2+2b+3$, soit $y=(2b+2)x-2b^2-2b+b^2+2b+3$, soit $\boxed{y=(2b+2)x-b^2+3}$.

2) Une droite d sera une tangente commune aux deux courbes s'il existe deux réels a et b tels que $d=T_a$ et $d=T_b$.
On a vu au 1) que T_a a un coefficient directeur de $2a$ et une ordonnée à l'origine de $-a^2$, et que T_b a un coefficient directeur de $2b+2$ et une ordonnée à l'origine de $-b^2+3$.
T_a et T_b seront confondues si et seulement si $2a=2b+2$ et $-a^2=-b^2+3$, soit si on a : $\begin{cases} a=b+1 \\ a^2=b^2-3 \end{cases}$.

3) (S) $\begin{cases} a=b+1 \\ a^2=b^2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ (b+1)^2=b^2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ b^2+2b+1=b^2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ 2b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2+1 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}}$.

Le <u>coefficient directeur</u> de d est donc $2a$, soit $2\times(-1)$, soit $\boxed{-2}$. (Ou encore $2b+2$ soit $2\times(-2)+2$, soit -2).
<u>L'ordonnée à l'origine</u> de d est donc $-a^2$, soit $-(-1)^2$ soit $\boxed{-1}$. (Ou encore $-b^2+3$, soit $-(-2)^2+3$, soit $-4+3$, soit -1.)

d a donc pour équation $\boxed{y=-2x-1}$, ce qui est conforme au graphique fourni par l'énoncé.

Exercice 2 : 1) Ici, pour prouver l'égalité $x^3-3x-2=(x+1)(x^2-x-2)$ (sous-entendu pour tout réel x), développons et réduisons le second membre et essayons d'obtenir le premier.

$(x+1)(x^2-x-2)=x^3-x^2+x^2-2x-x-2=x^3-3x-2$ C.Q.F.D.

2) f est définie sur ℝ par $f(x)=\frac{1}{2}(x^2-3)$ et g est définie sur ℝ* par $g(x)=\frac{1}{x}$.

a) Un point de coordonnées (x;y) appartiendra à la fois à la courbe représentative de f et à celle de g si et seulement si $\begin{cases} y=\frac{1}{2}(x^2-3) \\ y=\frac{1}{x} \end{cases}$. On aura donc nécessairement $\frac{1}{2}(x^2-3)=\frac{1}{x}$ (E)

Résolvons (E) pour x ∈ ℝ* (car 0 est valeur interdite) :
(E) ⇔ $x(x^2-3)=2$ d'après la règle du produit en croix.
(E) ⇔ $x^3-3x-2=0$.

D'après l'égalité démontrée au 1), (E) ⇔ $(x+1)(x^2-x-2)=0$ ⇔ $x+1=0$ ou $x^2-x-2=0$.

Résolvons $x^2-x-2=0$. $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-2)=1+8=9=3^2$

Donc les solutions de l'équation $x^2-2x-2=0$ sont $x_1=\frac{1-3}{2}=-1$ et $x_2=\frac{1+3}{2}=2$.

Donc (E) ⇔ $x+1=0$ ou $x=-1$ ou $x=-2$ ⇔ $x=-1$ ou $x=-1$ ou $x=2$. S={-1;2}

$f(-1)=\frac{1}{2}((-1)^2-3)=\frac{1}{2}(1-3)=-1$ (Vérifions que $g(-1)=-1$ aussi : $g(-1)=\frac{1}{-1}=-1$)
$f(2)=\frac{1}{2}(2^2-3)=\frac{1}{2}(4-3)=\frac{1}{2}$ ($g(2)=\frac{1}{2}$ aussi)

Les courbes représentatives de f et de g ont donc deux points d'intersection : $A(-1;-1)$ et $B\left(2;\frac{1}{2}\right)$, ce qui est conforme au graphique de l'énoncé.

b) f est dérivable sur ℝ, et pour tout $x \in$ ℝ, $f'(x)=\frac{1}{2}(2x)=x$.

g est dérivable sur]−∞;0[et sur]0;+∞[, et pour tout x appartenant à l'un ou l'autre de ces deux intervalles, on a : $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Pour montrer que les courbes représentatives de f et de g admettent une tangente commune en A $(-1;-1)$ qui est un point commun à ces deux courbes, il suffit de prouver que $f'(-1)=g'(-1)$, car deux droites passant par un même point et ayant le même coefficient directeur sont confondues.
$f'(-1)=-1$ $g'(-1)=-\frac{1}{(-1)^2}=-1$, donc $f'(-1)=g'(-1)$.
Les courbes représentatives de f et de g admettent bien une tangente commune en $A(-1;-1)$.

c) Pour étudier les positions relatives des deux courbes, que nous nommerons Cf (courbe représentative de f) et Cg (courbe représentative de g), étudions le signe de $f(x)-g(x)$ pour $x \in$ ℝ*.

$f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x^2-3)-\frac{1}{x}=\frac{x(x^2-3)-2}{2x}=\frac{x^3-3x-2}{2x}=\frac{(x+1)^2(x-2)}{2x}$.
Pourquoi ? Parce que $x^3-3x-2=(x+1)(x^2-x-2)$ d'après la question 1), et qu'on a vu que les racines du polynôme x^2-x-2 sont -1 et 2, ce qui nous permet de factoriser ce polynôme :
$x^2-x-2=1(x-(-1))(x-2)=(x+1)(x-2)$, donc $x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$.

x	−∞		-1		0		2		+∞
$(x+1)^2$		+	0	+		+		+	
$x-2$		−		−		−	0	+	
$2x$		−		−	0	+		+	
$f(x)-g(x)$		+	0	+	‖	−	0	+	

$f(x)-g(x)$ est donc positif pour x ∈]−∞;-1[∪]-1;0[∪]2;+∞[, ce qui signifie que Cf se situera au-dessus de Cg pour les abscisses *x* appartenant à ces intervalles.

$f(x)-g(x)=0$ Pour $x=-1$ et $x=2$, ce qui signifie que les courbes se coupent en leurs points de ces abscisses (ce que nous avons déjà prouvé au 2)a))

$f(x)-g(x)$ est négatif sur l'intervalle $]0;2[$, donc Cf est située en-dessous de Cg pour les abscisses appartenant à cet intervalle.

Exercice 3 : 1) a) APMN est un rectangle, donc (MP)//(NA), et comme N ∈ [AB], (MP)//(AB).
Dans le triangle ABC, on a donc :

- C, M, B alignés.
- C, P, A alignés.
- (MP)//(AB)

On peut donc appliquer le théorème de Thalès, qui nous donne les égalités suivantes :
$\frac{CM}{CB}=\frac{CP}{CA}=\frac{MP}{BA}$.

$\frac{CP}{CA}=\frac{MP}{BA}$ se traduit par $\frac{4-x}{4}=\frac{MP}{3}$, d'où $\boxed{MP=\frac{3}{4}(4-x)}$.

b) L'aire $A(x)$ du rectangle APMN est égale à $AP\times MP$, soit $x\times\frac{3}{4}(4-x)$, soit A(x)= $\boxed{\frac{3}{4}(4x-x^2)}$.

2) $\mathscr{A}$ est dérivable sur [0;4] et, pour tout x ∈ [0;4], on a : $A'(x)=\frac{3}{4}(4-2x)=\frac{3}{2}(2-x)$.

x	0		2		4
$\frac{3}{2}$		+		+	
$2-x$		–	0	+	
$A'(x)$		–	0	+	
$\mathscr{A}$	0	↗	3	↘	0

$A(2)=\frac{3}{4}(4\times2-2^2)=\frac{3}{4}(8-4)=\frac{3}{4}\times4=3$.
Bien évidemment, $A(0)=A(4)=0$, car dans ces deux cas, le rectangle APMN est aplati.

b) A(x) admet sur [0;4] un maximum pour $x=2$. Cela signifie que l'aire du rectangle APMN sera maximale lorsque x sera égal à 2. On aura alors $MP=\frac{3}{4}(4-2)=\frac{3}{2}$.

Exercice 4 : f est définie dur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^4+2x^2+x$.
On nomme $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.
Vérifions que A(-1;0) est bien un point de $\mathscr{C}$: $f(-1)=-(-1)^4+2\times(-1)^2+(-1)=-1+2-1=0$, OK.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x ∈ $\mathbb{R}$, $f'(x)=-4x^3+4x+1$.
Donc $f'(-1)=-4\times(-1)^3+4\times(-1)+1=4-4+1=1$.

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en A est :
$y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1) \Leftrightarrow y=1(x+1)+0 \Leftrightarrow \boxed{y=x+1}$, ce qui est conforme au graphique fourni par l'énoncé.

Existe-t-il un autre point de la courbe, $B(b, f(b))$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ soit la même ?

Si un tel point B existe, il est nécessaire que $f'(b)=1$, c'est-à-dire que la tangente en B à $\mathscr{C}$ ait le même coefficient directeur que la tangente en A à $\mathscr{C}$.

Résolvons l'équation $f'(b)=1$.

$f'(b)=1 \Leftrightarrow -4b^3+4b+1=1 \Leftrightarrow -4b^3+4b=0 \Leftrightarrow 4b(-b^2+1)=0 \Leftrightarrow 4b(1-b^2)=0$

$\Leftrightarrow 4b(1-b)(1+b)=0 \Leftrightarrow 4b=0$ ou $1-b=0$ ou $1+b=0$

$\Leftrightarrow \boxed{b=0}$ ou $\boxed{b=1}$ ou $\boxed{b=-1}$.

On trouve donc deux points de la courbe autres que A, les points d'abscisses 0 et 1, en lesquels la courbe admet une tangente de coefficient directeur 1.

Mais l'ordonnée à l'origine de ces deux tangentes est-elle 1, comme pour la tangente en A à $\mathscr{C}$?

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0 est :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$, soit $y=1\times x+(-0^4+2\times 0^2+0)$, soit $y=x$.

La tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0 a pour ordonnée à l'origine 0. Ce n'est donc pas la même que la tangente en A.

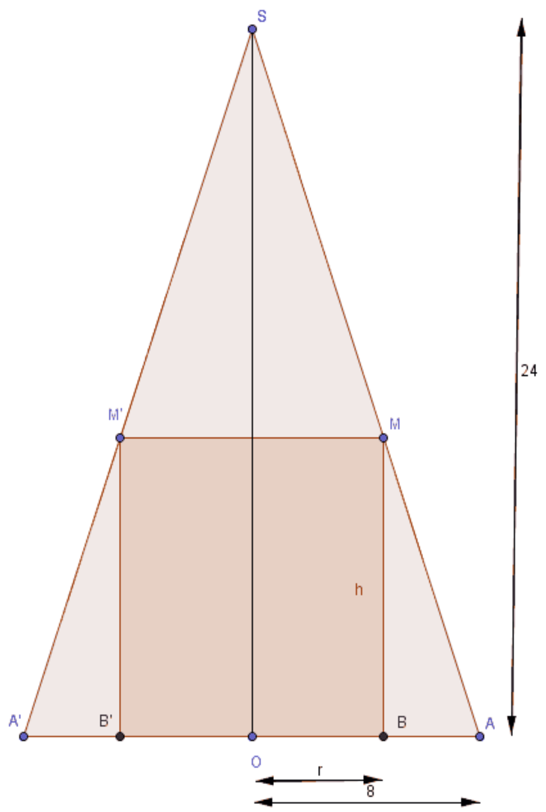
Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 est :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$, soit $y=1(x-1)+(-1^4+2\times 1^2+1)$, soit $y=x-1-1+2+1$, soit $\boxed{y=x+1}$.

La tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 a donc la même équation que la tangente à $\mathscr{C}$ en A.
Il s'agit bien de la même tangente. Il existe bien un point B(1 ;2) en lequel (T) est tangente à $\mathscr{C}$.
Ce résultat est conforme à ce qu'on pouvait conjecturer sur la figure.

On pouvait aussi se passer de la formule de l'équation de la tangente en calculant simplement $f(0)$ et $f(1)$ et en déterminant l'équation réduite des droites de coefficient directeur -1 passant par les points de coordonnées $(0;f(0))$ et $(1;f(1))$.

Exercice 5 : 1) Travaillons sur une coupe verticale du cône et du cylindre selon un plan vertical qui passe par le sommet du cône et le centre de sa base.



On obtient un rectangle BMM'B' inscrit dans un triangle isocèle SAA' de sommet principal S.
Si O est le centre de la base du cône, son axe de révolution est (SO).

On a h=BM et r=OB.
(SO)//(BM)//(B'M') car (SO) est aussi l'axe de rotation du cylindre.

Dans le triangle OAS, on a :

- A, M, S alignés
- A, B, O alignés
- (SO)//(BM)

Donc, d'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{AM}{AS}=\dfrac{AB}{AO}=\dfrac{MB}{SO}$.

$\dfrac{AB}{AO}=\dfrac{MB}{SO}$ se traduit, avec les valeurs, par $\dfrac{8-r}{8}=\dfrac{h}{24}$ (E)

(E) $\Leftrightarrow 8-r=\dfrac{h}{3} \Leftrightarrow 3(8-r)=h \Leftrightarrow \boxed{h=-3r+24}$

2) a) Le volume V du cylindre est égal à la surface de sa base multipliée par sa hauteur.
Sa base est un disque de rayon r, donc a une surface de πr^2.
Sa hauteur est $h=-3r+24$
Donc $V=\pi r^2(-3r+24)$. $\boxed{V=3\pi r^2(8-r)}$

b) V est définie et dérivable sur $[0;8]$. Pour tout $r \in [0;8]$, on a :
$V(r)=3\pi r^2(8-r)=24\pi r^2-3\pi r^3$, donc $V'(r)=48\pi r-9\pi r^2$, $\boxed{V'(r)=3\pi r(16-3r)}$.

r	0		$\frac{16}{3}$		8
$3\pi r$	0	+		+	
$16-3r$		+	0	−	
$V'(r)$	0	+	0	−	
$V(r)$	0	↗	$\frac{2048\pi}{9}$	↘	0

$$V\left(\frac{16}{3}\right)=3\pi\left(\frac{16}{3}\right)^2\left(8-\frac{16}{3}\right)=3\pi\left(\frac{2^4}{3}\right)^2\frac{(24-16)}{3}=\frac{3\pi\times2^8\times8}{3^2\times3}=\frac{2048\pi}{9}$$

$V(r)$ est maximal pour $r=\frac{16}{3}$.
$3\times\left(8-\frac{16}{3}\right)=3\times\left(\frac{24-16}{3}\right)=8$. La hauteur h du cylindre est alors de 8 cm.

Exercice 6 : 1) a) M est un point d'un demi-cercle de diamètre [AB], donc le triangle AMB est rectangle en M.
Dans ce triangle, $\cos(\widehat{BAM})=\frac{AM}{AB}=\frac{AM}{6}$.

Dans le triangle AMH rectangle en H, $\cos(\widehat{BAM})=\cos(\widehat{HAM})=\frac{AH}{AM}=\frac{x}{AM}$.

On a donc $\frac{AM}{6}=\frac{x}{AM}$, soit $AM^2=6x$, donc, comme $AM\geqslant0$ et $x\geqslant0$, $AM=\sqrt{6x}$.

b) (HK) est une hauteur du triangle MHB, donc (HK)⊥(MB).
AMB est rectangle en M, donc (AM)⊥(MB).
Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles, donc (HK)//(AM).

Dans le triangle AMB, on a :
- B, K, M alignés
- B, H, A alignés
- (HK)//(AM)

Donc, d'après le théorème de Thalès : $\frac{HK}{AM}=\frac{BH}{BA}$, soit $\frac{f(x)}{\sqrt{6x}}=\frac{6-x}{6}$ ⇔ $\boxed{f(x)=\frac{\sqrt{6}}{6}(6-x)\sqrt{x}}$

2) a) Pour tout x ∈]0;6[$f(x)=\frac{\sqrt{6}}{6}u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=6-x$ donc $u'(x)=-1$
et $v(x)=\sqrt{x}$ donc $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=\frac{\sqrt{6}}{6}(u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x))$ $\quad f'(x)=\frac{\sqrt{6}}{6}\times\left(-\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(6-x)\right)$

$f'(x)=\frac{\sqrt{6}}{6}\times\left(\frac{-2x+6-x}{2\sqrt{x}}\right)$ $\quad f'(x)=\frac{\sqrt{6}(6-3x)}{12\sqrt{x}}$ $\quad \boxed{f'(x)=\frac{\sqrt{6}(2-x)}{4\sqrt{x}}}$

b)

x	0		2		6
$2-x$		$+$	0	$-$	
$\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

(Remarque : les coefficients $\sqrt{6}$ et 4 étant positifs, ils n'interviennent pas dans le calcul du signe de $f'(x)$)

$f(2)=\frac{\sqrt{6}}{6}(6-2)\sqrt{2}=\frac{4}{6}\sqrt{12}=\frac{2\times2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ HK est maximale lorsque $\boxed{x=2}$. HK vaut alors $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 7 : 1) f est définie sur ℝ par $f(x)=x^4-x^2+1$.

a) f est dérivable sur ℝ et, pour tout x ∈ ℝ, $\boxed{f'(x)=4x^3-2x}$.

b) $f'(x)=2x(2x^2-1)$ $\quad f'(x)=2x(x\sqrt{2}+1)(x\sqrt{2}-1)$ $\qquad$ Rappel : $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x\sqrt{2}+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x\sqrt{2}-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

$f(0)=1$ $\qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$ $\qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$

2) a) Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses (c'est-à-dire le point de l'axe des abscisses tel que (MH)⊥(OI) ou M lui-même s'il est sur l'axe des abscisses)

Si M≠J, le triangle OMH est rectangle en H. On a $OH=|x|$ et $HM=|1-x^2|$.
D'après le théorème de Pythagore, $OM^2=OH^2+HM^2$, soit $OM^2=x^2+(1-x^2)^2$

Rappel : pour tout réel x, $|x|^2=x^2=(-x)^2$

Donc $OM^2=x^2+1-2x^2+x^4$ $\qquad OM^2=x^4-x^2+1$ $\qquad \boxed{OM^2=f(x)}$

b) D'après l'étude faite à la question 1, f(x) est minimal pour $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Les points de la parabole les plus proches de O ont donc pour coordonnées : ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{2}$) et ($\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{2}$)