1$^{\text{ère}}$ S – 21 Exercices sur le produit scalaire

Exercice 1 : 1) Dessinez un triangle ABC tel que AB = 3 cm, AC = 5 cm et BC = 6 cm.

2) Exprimez de 2 façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

3) Déduisez-en *cos* $\widehat{BAC}$ puis calculez, à un degré près, une mesure de $\widehat{BAC}$.

4) En procédant de façon analogue, déterminez des mesures des angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ACB}$.

Exercice 2 : 1) Dessinez un triangle ABC tel que AB=7, AC=5 et $\widehat{BAC}$ =65°.

2) Calculez $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ à 10^{-2} près.

3) Exprimez BC^2 en fonction de AB, AC et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, puis calculez une mesure de BC à 10^{-2} cm près.

4) Déterminez alors, à 1 degré près et en vous inspirant de l'exercice 2, des mesures des angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ACB}$.

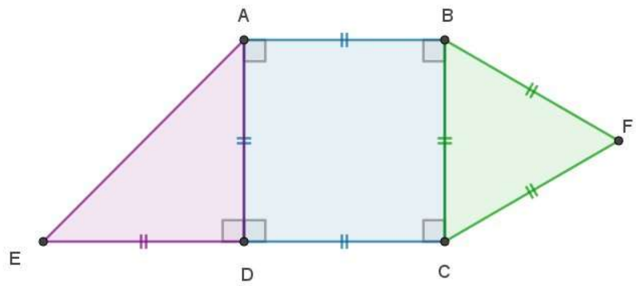
Exercice 3 : le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. On donne : A(-2;1), B(1;4) et C(3;2)

1) Dessinez le triangle ABC et calculez AB, BC et CA.

2) Calculez les produits scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

3) Déduisez-en à un degré près les mesures des angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ et $\widehat{CAB}$.

Exercice 4 : ABCD est un carré de côté 4. ADE est un triangle rectangle isocèle en D et BCF un triangle équilatéral. Calculez les produits scalaires suivants :



$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}$	$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BF}$	$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$	$\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{DA}$	$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE}$	$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD}$	

Exercice 5 : Dans un repère orthonormé, (C) est le cercle de centre ω(3;1) et de rayon $\sqrt{5}$; A est le point de coordonnées (4;3). 1) Vérifiez que A appartient au cercle (C).

2) Déterminez une équation de la tangente en A au cercle (C).

Exercice 6 : ABC est un triangle équilatéral de côté *a*. Soit I, J, K les points définis par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$. Démontrez que le triangle IJK est équilatéral.

Exercice 7 : Dans un repère orthonormé, soit A(1;5), B(6;2) et C(-1 ;-2).

1) Déterminez les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

2) Déterminez les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.

3) Déterminez les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

4) Écrivez une équation de la droite (GH) et montrez que le point Ω appartient à cette droite.

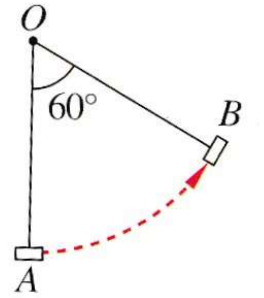
Exercice 8 : Deux droites Δ_1 et Δ_2 passent par un même point A et sont respectivement parallèle et perpendiculaire à une même droite d. Dans chacun des cas suivants, trouvez une équation de Δ_1 et une équation de Δ_2. 1) A a pour coordonnées (-1;3) et $\vec{n}$ (-3;2) est un vecteur normal à *d*.

2) A a pour coordonnées (5;2) et $\vec{u}$ (2;1) est un vecteur directeur de *d*.

Exercice 9 : Un pendule est constitué d'une masse de 3 kg fixée à l'extrémité d'une tige de masse négligeable, de longueur 1 m.

Quel est le travail effectué par soin poids $\vec{P}$ lors de l'oscillation du pendule de A en B ? Est-ce un travail moteur ou résistant ?

Rappel : le travail d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement de A vers B est égal à $\vec{F}.\overrightarrow{AB}$



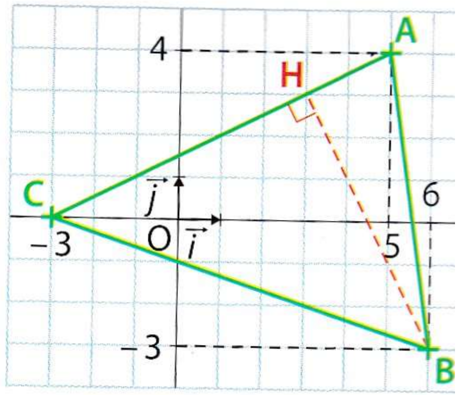
Exercice 10 : Les points A, B, C sont donnés par leurs coordonnées lisibles sur le graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Calculez AC et montrez que $AH=\sqrt{5}$

3) Calculez BH.

4) Démontrez que l'aire du triangle ABC est un nombre entier.

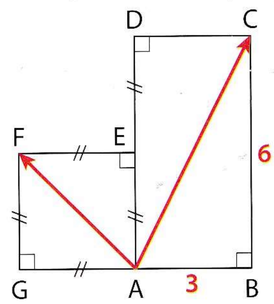


Exercice 11 : ABCD est un rectangle tel que AB = 3 et BC = 6. E est le milieu du segment [AD]. AEFG est un carré.

Le professeur demande aux élèves de calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF}$. Voici ci-dessous les copies de 2 élèves.

1) Pourquoi ces deux réponses sont-elles fausses ? Justifiez.

2) Rédigez une solution correcte à ce problème.



Copie 1 :

F et C se projettent orthogonalement en E et D sur (AD) donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=3\times 6=18$.

Copie 2 :

On choisit le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})$. Le point C a pour coordonnées (1;2) et F(−1;1) donc : $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (1;2) et $\overrightarrow{AF}(-1;1)$.
Il en résulte que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=-1+2=1$.

Exercice 12 : Dans un repère orthonormé, on donne A(3;1), B(1 ;-1), C(2, $\sqrt{2}$) et D(C(2,- $\sqrt{2}$).

1) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BD}$.

2) Calculer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

3) Calculer BC et BD.

4) En dduire la nature du quadrilatère ACBD.

Exercice 13 : Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC]. Démontrez que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

Exercice 14 : 1) Développez $(\vec{u}+\vec{v})^2$ et $(\vec{u}-\vec{v})^2$.

2) Calculez $(\vec{u}+\vec{v})^2+(\vec{u}-\vec{v})^2$ et $(\vec{u}+\vec{v})^2-(\vec{u}-\vec{v})^2$.

3) Soit O un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires. Appelons A, B et C les points tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{u}+\vec{v}$. Faire une figure.

4) Précisez la nature du quadrilatère OACB.

5) Exprimez, à l'aide des points de la figure, le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$.

6) En utilisant le premier résultat de la question 2), démontrez que $2OA^2+2OB^2=OC^2+AB^2$.

7) Écrivez la deuxième égalité obtenue à la question 2 à l'aide des points O, A, B, C puis retrouvez une propriété des diagonales du rectangle.

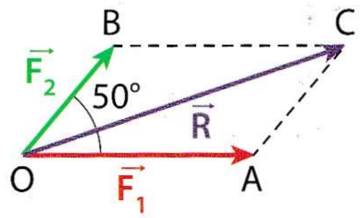
8) Justifiez l'égalité $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB}=OB^2-OA^2$ puis retrouvez une propriété des diagonales d'un losange.

9) Soit OACB un parallélogramme tel que, l'unité étant le *cm*, OA=8, OB=5, $\widehat{AOB}$ =30°. Calculez :

a) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ b) OC^2 et AB^2, puis OC et AB. c) $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB}$.

10) Un parallélogramme ABCD est tel que AB=7, BC=6 et AC=10. Construisez ce parallélogramme et calculez la longueur BC de sa deuxième diagonale.

Exercice 15 : Le point O est soumis à deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ d'intensités respectives 300 et 200 Newtons. $\widehat{AOB}$ =50°. Le vecteur $\vec{R}$ est la résultante de ces deux forces : $\vec{R}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$.

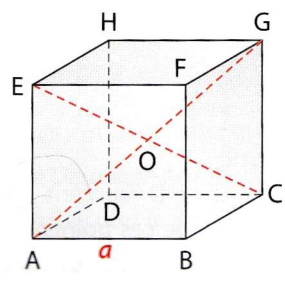


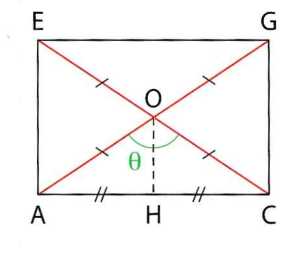
1) Calculez $\vec{R}^2$

2) Déduisez-en l'intensité de R à un Newton près.

Exercice 16 : ABCDEFGH est un cube de côté *a* et de centre O. On se propose de démontrer que la mesure θ de l'angle $\widehat{AOC}$ est la même pour tous les angles.

On remarque que ce problème se ramène à un problème de géométrie plane en considérant le rectangle ACGE.





1) a) Démontrez que $AC=a\sqrt{2}$ et que $AG=a\sqrt{3}$ b) Déduisez-en que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=\frac{3}{4}a^2\cos\theta$.

2) On souhaite calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$ d'une autre manière. On appelle H le milieu du segment [AC].

a) Exprimez les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{HA}$.

b) Déduisez-en que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=-\frac{a^2}{4}$.

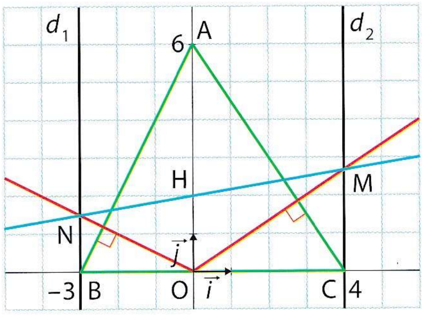
3) Déduisez l'expression de $\cos\theta$ des questions 1) et 2), puis la mesure de θ, en degrés, arrondie au dixième.

Exercice 17 : A, B, C sont trois points donnés. Démontrez que, pour tout point M, on a :

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0$.

À l'aide de cette relation, démontrez que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 18 : Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points : $A(0;6)$, $B(-3;0)$ et $C(4;0)$. Les droites d_1 et d_2 ont pour équations respectives $x=-3$ et $x=4$. Les perpendiculaires menées par O à (AB) et (AC) coupent la droite d_1 en N et la droite d_2 en M. La droite (MN) coupe l'axe des ordonnées en H.

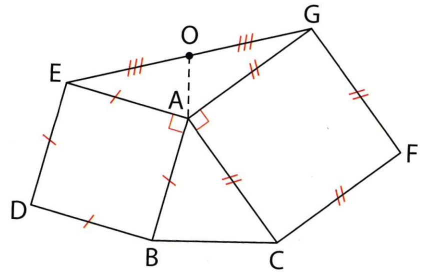


1) Calculez les coordonnées des points M et N.

2) a) Trouvez une équation de la droite (MN). b) Déduisez-en les coordonnées du point H.

3) Calculez le produit scalaire $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}$ puis concluez.

Exercice 19 : ABC est un triangle. ABDE et ACFG sont deux carrés disposés comme l'indique la figure ci-contre.



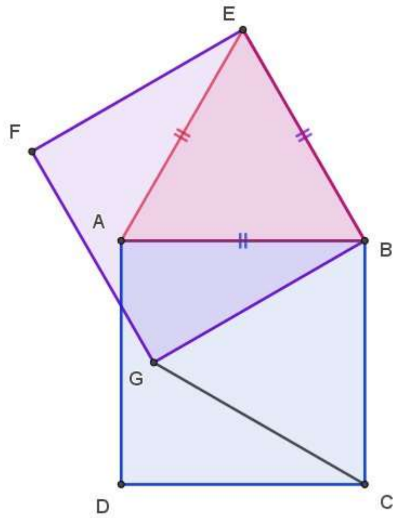
1) a) Démontrer que $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Sachant que $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$ et que $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AB}$, démontrez que (EC) et (BG) sont perpendiculaires.

2) a) Démontrez que $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG}$

b) En tenant compte de la décomposition des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BG}$ de la question 1), démontrez que EC=BG.

Exercice 20 : À partir d'un triangle équilatéral ABE de côté 2, on construit deux carrés indirects ABCD et EBGF comme sur la figure ci-contre.



1) Calculer les produits scalaire $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$.

2) Montrer que le triangle BCG est équilatéral.

3) En déduire $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{EF}$.

4) Calculer $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF}$

5) Calculer $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BF}$

6) En déduire que les points D, G et E sont alignés.

Exercice 21 : Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, d est la droite d'équation $3x-4y+12=0$, A le point de coordonnées $(5;3)$ et Δ la perpendiculaire menée par A à d. Les droites d et Δ se coupent en H. On souhaite calculer AH, distance de A à d.

1) a) Trouvez un vecteur $\vec{n}$ normal à d.

b) Justifiez que $\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$, k étant un nombre non nul.

c) Déduisez-en les coordonnées de H en fonction de k.

2) a) En écrivant que H est un point de d, calculez k.

b) Déduisez-en que AH=3.