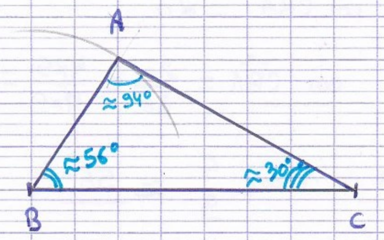
Exercice 1.

Hypothèses :

ABC est un triangle.
$AB = 3\text{ cm}$
$AC = 5\text{ cm}$
$BC = 6\text{ cm}$

1)



2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

Al Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

3) On a donc : $AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

soit : $3 \times 5 \times \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 6^2)$

soit $15 \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2}(9 + 25 - 36)$

soit $30 \cos \widehat{BAC} = 34 - 36$

soit $\cos \widehat{BAC} = -\frac{2}{30} = \boxed{-\frac{1}{15}}$

$\widehat{BAC} = \text{acos}\left(-\frac{1}{15}\right) \approx 94°$

4) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = BC \times BA \times \cos \widehat{CBA}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - AC^2)$

d'où $BC \times BA \times \cos \widehat{CBA} = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - AC^2)$

soit $6 \times 3 \times \cos \widehat{CBA} = \frac{1}{2}(3^2 + 6^2 - 5^2)$

soit $18 \cos \widehat{CBA} = \frac{1}{2}(9 + 36 - 25)$

soit $36 \cos \widehat{CBA} = 20$

soit $\cos \widehat{CBA} = \frac{20}{36} = \frac{4 \times 5}{4 \times 9} = \boxed{\frac{5}{9}}$

$\widehat{CBA} = \text{acos}\, \frac{5}{9} \approx 56°$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos \widehat{BCA}$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - AB^2)$

donc $CA \times CB \times \cos \widehat{BCA} = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - AB^2)$

soit $5 \times 6 \times \cos \widehat{BCA} = \frac{1}{2}(5^2 + 6^2 - 3^2)$

soit $30 \cos \widehat{BCA} = \frac{1}{2}(25 + 36 - 9)$

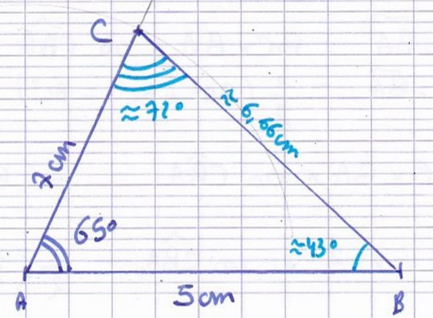
soit $60 \cos \widehat{BCA} = 52$

soit $\cos \widehat{BCA} = \frac{52}{60} = \frac{4 \times 13}{4 \times 15} = \boxed{\frac{13}{15}}$

$\widehat{BCA} = \text{acos}\, \frac{13}{15} \approx 30°$

Exercice 2.

1)



Hypothèses :

$AB = 7\text{ cm}$
$AC = 5\text{ cm}$
$\widehat{BAC} = 65°$

Suite de l'exercice 2.

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$
$= 7 \times 5 \times \cos 65°$
$= 35 \cos 65°$
$\approx 14{,}79$

3) Théorème d'Al-Kashi :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
$= 7^2 + 5^2 - 2 \times 35 \cos 65°$
$= 49 + 25 - 70 \cos 65°$
$= 74 - 70 \cos 65°$

$BC = \sqrt{74 - 70 \cos 65°}$

$BC \approx 6{,}66$ cm

4) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$
$= \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - AC^2)$

donc $BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - AC^2)$

soit $7 \times \sqrt{74 - 70\cos 65°} \times \cos \widehat{ABC} = \frac{1}{2}(49 + 74 - 70 \cos 65° - 25)$

soit $14\sqrt{74 - 70\cos 65°} \times \cos \widehat{ABC} = 98 - 70 \cos 65°$

soit $\sqrt{74 - 70\cos 65°} \times \cos \widehat{ABC} = 7 - 5 \cos 65°$

soit $\boxed{\cos \widehat{ABC} = \dfrac{7 - 5\cos 65°}{\sqrt{74 - 70 \cos 65°}}}$

$\widehat{ABC} = \arccos\left(\dfrac{7 - 5\cos 65°}{\sqrt{74 - 70\cos 65°}}\right) \approx 43°$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos \widehat{ACB}$
$= \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2 - AB^2)$

d'où $CA \times CB \times \cos \widehat{ACB} = \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2 - AB^2)$

soit $5 \times \sqrt{74 - 70\cos 65°} \times \cos \widehat{ACB} = \frac{1}{2}(5^2 + 74 - 70 \cos 65° - 7^2)$

soit $10\sqrt{74 - 70\cos 65°} \times \cos \widehat{ACB} = 50 - 70 \cos 65°$

soit $\sqrt{74 - 70\cos 65°} \times \cos \widehat{ACB} = 5 - 7 \cos 65°$

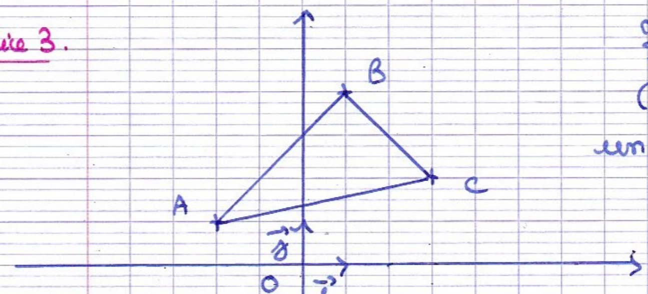
soit $\boxed{\cos \widehat{ACB} = \dfrac{5 - 7\cos 65°}{\sqrt{74 - 70\cos 65°}}}$

d'où $\widehat{ACB} = \arccos\left(\dfrac{5 - 7\cos 65°}{\sqrt{74 - 70\cos 65°}}\right)$

$\widehat{ACB} \approx 72°$

Exercice 3.

1)



Hypothèses :
$(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormal.
$A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$
$B\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$
$C\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-2)\\4-1\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}}$

d'où $AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Suite de l'exercice 3 (question 1) * $\vec{BC}\begin{pmatrix}3-1\\2-4\end{pmatrix}$ $\boxed{\vec{BC}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}}$

$BC = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = \sqrt{4}\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

* $\vec{CA}\begin{pmatrix}2-3\\1-2\end{pmatrix}$ $\boxed{\vec{CA}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}}$ $CA = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

2) * $\vec{AB}.\vec{AC}$ avec $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ car $\vec{AC} = -\vec{CA}$

$\vec{AB}.\vec{AC} = 3\times 5 + 3\times 1 = 15 + 3 = 18$

* $\vec{BC}.\vec{BA}$ avec $\vec{BC}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{BA}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ car $\vec{BA} = -\vec{AB}$

$\vec{BC}.\vec{BA} = 2\times(-3) + (-2)\times(-3) = 0$

* $\vec{CA}.\vec{CB}$ avec $\vec{CA}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{CB}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ car $\vec{CB} = -\vec{BC}$

$\vec{CA}.\vec{CB} = (-5)\times(-2) + (-1)\times 2 = 10 - 2 = 8$.

3) Calcul de $\widehat{ABC}$: avec $\vec{BC}.\vec{BA} = 0$ et $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ non nuls

→ l'angle $\widehat{ABC}$ est droit (90°)

Calcul de $\widehat{BCA}$: avec $\vec{CA}.\vec{CB} = 8$, $CA = \sqrt{26}$ et $CB = 2\sqrt{2}$

$\vec{CA}.\vec{CB} = CA \times CB \times \cos\widehat{BCA}$

devient $8 = \sqrt{26}\times 2\sqrt{2}\times\cos\widehat{BCA}$

soit $4 = \sqrt{26\times 2}\times\cos\widehat{BCA}$

soit $4 = \sqrt{2\times 13\times 2}\times\cos\widehat{BCA}$

soit $4 = \sqrt{4}\times\sqrt{13}\times\cos\widehat{BCA}$

soit $4 = 2\sqrt{13}\times\cos\widehat{BCA}$ $) :2\sqrt{13}$

soit $\dfrac{2}{\sqrt{13}} = \cos\widehat{BCA}$

$\boxed{\cos\widehat{BCA} = \dfrac{2}{\sqrt{13}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}}$ donc $\widehat{BCA} = a\cos\left(\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\right)$

$\widehat{BCA} \approx 56°$

Calcul de $\widehat{CAB}$ avec $\vec{AB}.\vec{AC} = 18$, $AB = 3\sqrt{2}$ et $AC = \sqrt{26}$.

$\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{CAB}$

devient $18 = 3\sqrt{2}\times\sqrt{26}\times\cos\widehat{CAB}$ $) :3$

soit $6 = \sqrt{2\times 13\times 2}\times\cos\widehat{CAB}$

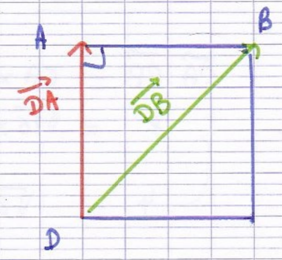
soit $6 = \sqrt{4}\sqrt{13}\cos\widehat{CAB}$ $) :2$

soit $3 = \sqrt{13}\cos\widehat{CAB}$

soit $\dfrac{3}{\sqrt{13}} = \cos\widehat{CAB}$ $\boxed{\cos\widehat{CAB} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}}$

$\widehat{CAB} = a\cos\left(\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\right) \approx 34°$

Exercice 4. * $\vec{DA}.\vec{DB}$



A est le projeté orthogonal de B sur (DA).

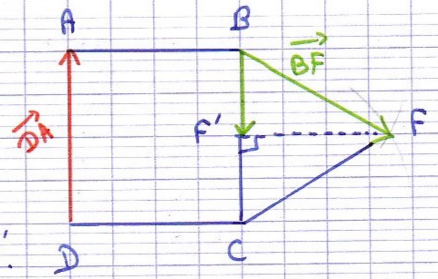
Donc $\vec{DA}.\vec{DB} = \vec{DA}.\vec{DA}$

$= DA^2$

$= 4^2$

$\vec{DA}.\vec{DB} = 16$

Suite de l'exercice 4. * $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BF}$



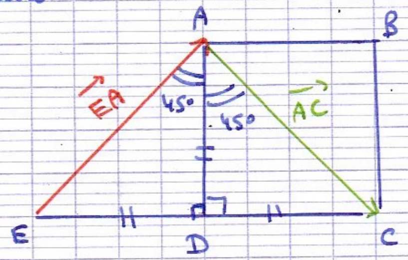
Soit F' le milieu de [BC].
Comme le triangle BFC est équilatéral, sa hauteur issue de F coupe (BC) en F'.

F' est le projeté orthogonal de F sur (BC)
et (BF') // (AD) puisque ABCD est un carré.
C'est pourquoi :

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BF'} = -4\times2$ $\quad \boxed{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BF} = -8}$

car $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BF'}$ sont de même direction et de sens contraires

* $\boxed{\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC} = 0}$

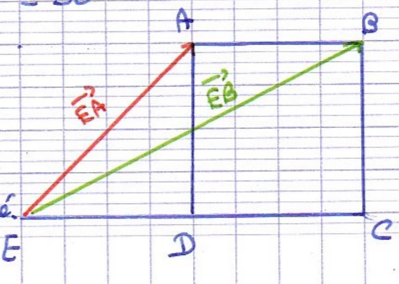


car (EA) et (AC) sont perpendiculaires.

En effet : $\widehat{EAD} = 45°$ car EAD est un triangle rectangle isocèle en D
et $\widehat{DAC} = 45°$ car ADC est aussi un triangle rectangle isocèle en D.

$\widehat{EAC} = \widehat{EAD} + \widehat{DAC} = 45° + 45° = 90°$

* $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$ Soit $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$
et $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$



$(D;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé.

E (−4 ; 0) car $\overrightarrow{DE} = -4\vec{i}$

justification facultative
$\left\{ \begin{array}{l} \text{(car D est le milieu de [EC]} \\ \text{donc } \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DA} \text{ . } \vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{ED} \\ \text{donc } \frac{1}{4}\overrightarrow{ED} = \vec{i} \text{ donc } \overrightarrow{ED} = 4\vec{i} \text{ donc } \overrightarrow{DE} = -4\vec{i}) \end{array} \right.$

A (0 ; 4) car $\overrightarrow{DA} = 4\vec{j}$ puisque $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$

B (4 ; 4) car $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$ puisque ABCD est un carré donc un parallélogramme,
donc $\overrightarrow{DB} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$

$\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix} x_A - x_E \\ y_A - y_E \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EA}\begin{pmatrix} 0-(-4) \\ 4-0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EA}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} x_B - x_E \\ y_B - y_E \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} 4-(-4) \\ 4-0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = 4\times8 + 4\times4$ ← formule $xx'+yy'$ en repère orthonormé
$= 32 + 16$

$\boxed{\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = 48}$

<u>Autre idée</u> : avec <u>le théorème de Pythagore</u> :

Dans le triangle EDA rectangle en D : $EA^2 = ED^2 + DA^2$
donc $EA^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$

Dans le triangle EBC rectangle en C : $EB^2 = EC^2 + CB^2$
$EB^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$

$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}$ → j'utilise la formule
donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EA}$

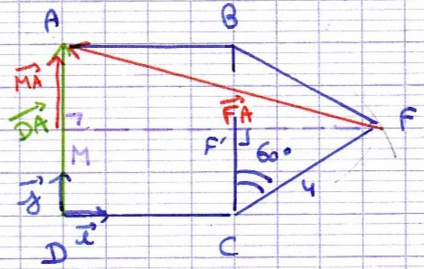
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}+\vec{v}\|^2\right)$

Suite de l'exercice 4. $\vec{EA}.\vec{EB} = \frac{1}{2}(EA^2 + EB^2 - AB^2)$

$= \frac{1}{2}(32 + 80 - 4^2)$

$= \frac{1}{2}(96)$ $\boxed{\vec{EA}.\vec{EB} = 48}$

Heureusement que j'ai vérifié par une seconde méthode : j'avais fait une erreur de calcul avec la première !



* $\vec{FA}.\vec{DA}$. Soit M le projeté orthogonal de F sur (AD). C'est aussi le milieu de [AD] car on a vu que la hauteur du triangle équilatéral BFC coupe (BC) en son milieu F'. (FF') est aussi la médiatrice de [BC]. Elle coupe aussi [AD] en son milieu puisque ABCD est un carré.

$\boxed{\vec{FA}.\vec{DA}} = \vec{MA}.\vec{DA} = 2 \times 4 = \boxed{8}$

Et avec les coordonnées dans le repère $(D;\vec{i},\vec{j})$?

$D(0;0)$ $A(0;4)$ et $F(4 + \frac{4\sqrt{3}}{2} ; 2)$

car dans le triangle FCF' rectangle en F',

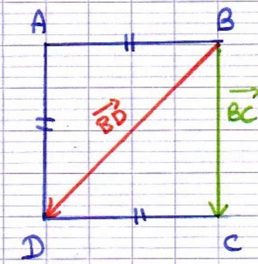
$\sin \hat{C} = \frac{F'F}{FC}$ donc $FF' = FC \sin \hat{C} = 4 \times \sin 60° = \frac{4\sqrt{3}}{2}$

$F\ (4 + 2\sqrt{3} ; 2)$ $\vec{FA}\begin{pmatrix} 4+2\sqrt{3} - 0 \\ 2 - 4 \end{pmatrix}$ $\vec{FA}\begin{pmatrix} 4+2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$

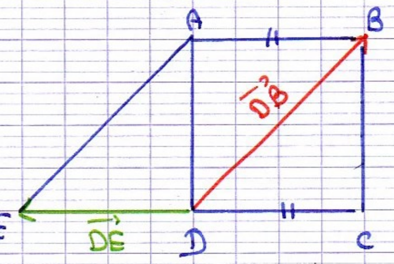
$\vec{DA}\begin{pmatrix} 0-0 \\ 4-0 \end{pmatrix}$ $\vec{DA}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{FA}.\vec{DA} = (4+2\sqrt{3}) \times 0 + (-2) \times 4 = \boxed{8}$

* $\vec{BD}.\vec{BC} = \vec{BC}.\vec{BC}$
$= 4 \times 4$
$= \boxed{16}$

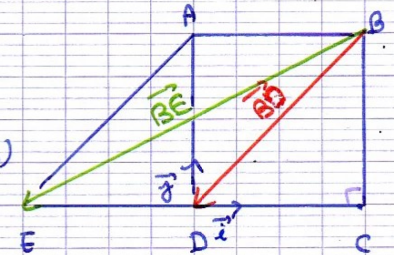


car C est le projeté orthogonal de D sur (BC)



* $\vec{DB}.\vec{DE} = \vec{DC}.\vec{DE}$
$= -4 \times 4$
$= \boxed{-16}$

* $\vec{BE}.\vec{BD}$ Dans le repère $(D;\vec{i},\vec{j})$:



$B(4;4)$ $E(-4;0)$ $D(0;0)$

$\vec{BE}\begin{pmatrix} 0-4 \\ -4-4 \end{pmatrix}$ $\vec{BE}\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$

$\vec{BD}\begin{pmatrix} 0-4 \\ 0-4 \end{pmatrix}$ $\vec{BD}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{BE}.\vec{BD} = -4 \times (-4) + (-8) \times (-4)$
$= 16 + 32$

$\boxed{\vec{BE}.\vec{BD} = 48}$ → même configuration que pour $\vec{EA}.\vec{EB}$: on s'attendait à trouver le même résultat.

Autre méthode : $\vec{BE} - \vec{BD} = \vec{BE} + \vec{DB} = \vec{DB} + \vec{BE} = \vec{DE}$ d'après la relation de Chasles.

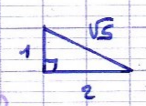
$\vec{BE}.\vec{BD} = \frac{1}{2}(BE^2 + BD^2 - DE^2) = \frac{1}{2}(\underbrace{(8^2+4^2) + (4^2+4^2)}_{96} - 4^2) = 48$

Pythagore dans BEC   Pythagore dans BDC

Exercice 5. Préambule : Comment tracer un cercle de rayon $\sqrt{5}$?

$5 = 1^2 + 2^2$

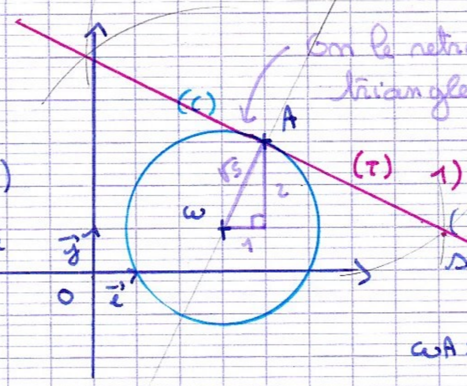
Je trace un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 et 2.



D'après le théorème de Pythagore : l'hypoténuse mesure $\sqrt{5}$.

Hypothèses :

* Le repère est orthonormé
* $\omega\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$
* (C) est le cercle de centre ω et de rayon $\sqrt{5}$



On le retrouve ici, notre triangle rectangle.

1) A appartiendra à (C) si et seulement si $\omega A = \sqrt{5}$

$\omega A = \sqrt{(x_A - x_\omega)^2 + (y_A - y_\omega)^2}$

$= \sqrt{(4-3)^2 + (3-1)^2}$

$= \sqrt{1^2 + 2^2}$

$\omega A = \sqrt{5}$

→ donc A appartient bien au cercle (C) de centre ω et de rayon $\sqrt{5}$.

2) La tangente (T) à (C) passant par A est la droite perpendiculaire à (ωA) qui passe par A.

$\vec{\omega A}\begin{pmatrix}x_A - x_\omega\\y_A - y_\omega\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (T)

$\vec{\omega A}\begin{pmatrix}4-3\\3-1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{\omega A}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ → donc (T) admettra une équation cartésienne de la forme $x + 2y + c = 0$

$A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \in (T)$ donc $x_A + 2y_A + c = 0$

soit $4 + 2\times 3 + c = 0$

soit $c = -4 - 6$

soit $c = -10$

Une équation cartésienne de (T) est donc

$$\boxed{x + 2y - 10 = 0}$$

Mais les profs préfèrent en général cette rédaction :

(T) est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ du plan tels que $\vec{AM}.\vec{A\omega} = 0$

$\vec{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y-3\end{pmatrix}$ $\quad \vec{A\omega}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

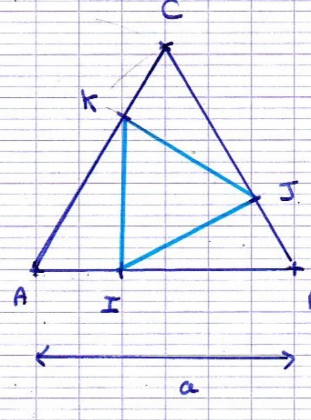
$\vec{AM}.\vec{A\omega} = 0 \iff (x-4)\times(-1) + (y-3)\times(-2) = 0$

$\iff -x + 4 - 2y + 6 = 0$

$\iff \boxed{-x - 2y + 10 = 0}$

Une équation cartésienne de (T)

Exercice 6.



Hypothèses :

(H1) ABC est un triangle équilatéral de côté a.

(H2) $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AJ}$

(H3) $\vec{BJ} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

(H4) $\vec{CK} = \frac{1}{3}\vec{CA}$

Suite de l'exercice 6. Voici mon idée (mais vous en aurez peut-être d'autres et peut-être des meilleures) :

exprimer le produit scalaire $\vec{BI}.\vec{BJ}$ de 2 manières afin de pouvoir calculer la longueur IJ en fonction de a.

ABC est équilatéral d'après (H1) donc $\widehat{IBJ} = 60°$
donc $\cos \widehat{IBJ} = \frac{1}{2}$

$\vec{BI}.\vec{BJ} = BI \times BJ \times \cos 60°$

$= \frac{\cancel{2}}{3} a \times \frac{1}{3} a \times \frac{1}{\cancel{2}}$

car $\vec{BJ} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ car $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ donc $\vec{BI} = \frac{2}{3}\vec{BA}$.

$$\boxed{\vec{BI}.\vec{BJ} = \frac{a^2}{9}} \quad (E_1)$$

$\vec{BI}.\vec{BJ} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{BI}\|^2 + \|\vec{BJ}\|^2 - \|\vec{BI} - \vec{BJ}\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - JI^2\right)$ car $\vec{BI} - \vec{BJ} = \vec{BI} + \vec{JB} = \vec{JB} + \vec{BI} = \vec{JI}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}a^2 + \frac{a^2}{9} - IJ^2\right)$ d'après la relation de Chasles.

$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{9}a^2 - IJ^2\right)$

$$\boxed{\vec{BI}.\vec{BJ} = \frac{5}{18}a^2 - \frac{1}{2}IJ^2} \quad (E_2)$$

(E_1) et (E_2) $\Rightarrow$ $\frac{a^2}{9} = \frac{5}{18}a^2 - \frac{1}{2}IJ^2$ (E_3)

$(E_3) \iff \frac{2a^2}{18} - \frac{5a^2}{18} = -\frac{1}{2}IJ^2$

$(E_3) \iff -\frac{3a^2}{18} = -\frac{1}{2}IJ^2$

$\times(-2)$ $\times(-2)$

$(E_3) \iff \frac{3a^2}{9} = IJ^2$

$(E_3) \iff IJ^2 = \frac{a^2}{3}$ donc $IJ = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

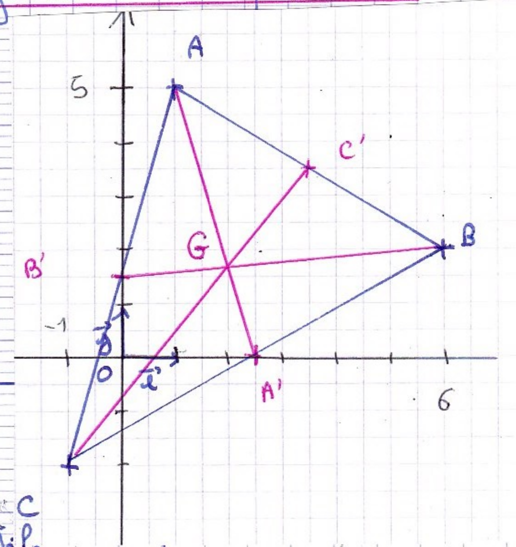
ou $\boxed{IJ = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

On trouve le même résultat :
- pour JK en calculant de 2 manières le produit scalaire $\vec{CK}.\vec{CJ}$
- pour IK en calculant de 2 manières le produit scalaire $\vec{AI}.\vec{AK}$

On a alors $IJ = JK = KI$
donc <u>le triangle IJK est équilatéral.</u>

Exercice 7. *Hypothèses:*

Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.
$A\binom{1}{5}$ $B\binom{6}{2}$ $C\binom{-1}{-2}$
G est le centre de gravité du triangle ABC.



1) G est le point de concours des médianes du triangle ABC. Je nomme A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

$A'\left(\frac{x_B + x_C}{2} ; \frac{y_B + y_C}{2}\right)$ $A'\left(\frac{6+(-1)}{2} ; \frac{2+(-2)}{2}\right)$ $\boxed{A'\left(\frac{5}{2} ; 0\right)}$

$C'\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ $C'\left(\frac{1+6}{2} ; \frac{5+2}{2}\right)$ $\boxed{C'\left(\frac{7}{2} ; \frac{7}{2}\right)}$

Notons temporairement $\binom{x}{y}$ les coordonnées de G.

Suite de l'exercice 7, question 1.

$G \in (AA')$ donc $\vec{GA}$ et $\vec{AA'}$ sont colinéaires.

$\vec{GA}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$ $\vec{GA}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-5 \end{pmatrix}$

$\vec{AA'}\begin{pmatrix} x_{A'}-x_A \\ y_{A'}-y_A \end{pmatrix}$ $\vec{AA'}\begin{pmatrix} \frac{5}{2}-1 \\ 0-5 \end{pmatrix}$ $\vec{AA'}\begin{pmatrix} \frac{5}{2}-\frac{2}{2} \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{AA'}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -5 \end{pmatrix}$

$\vec{GA}$ et $\vec{AA'}$ colinéaires $\iff \begin{vmatrix} x-1 & \frac{3}{2} \\ y-5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \iff -5(x-1)-\frac{3}{2}(y-5)=0$

$\iff -5x+5-\frac{3}{2}y+\frac{15}{2}=0$

$\times 2$ $\iff -10x+10-3y+15=0$ $\times 2$

$\iff -10x-3y+25=0$

$\iff \boxed{10x+3y-25=0}$

équation cartésienne de la droite (AA')

$G \in (CC')$ donc $\vec{GC}$ et $\vec{CC'}$ sont colinéaires

$\vec{GC}\begin{pmatrix} x-x_C \\ y-y_C \end{pmatrix}$ $\vec{GC}\begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix}$

$\vec{CC'}\begin{pmatrix} x_{C'}-x_C \\ y_{C'}-y_C \end{pmatrix}$ $\vec{CC'}\begin{pmatrix} \frac{7}{2}+1 \\ \frac{7}{2}+2 \end{pmatrix}$ $\vec{CC'}\begin{pmatrix} \frac{7}{2}+\frac{2}{2} \\ \frac{7}{2}+\frac{4}{2} \end{pmatrix}$ $\vec{CC'}\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$

$\vec{GC}$ et $\vec{CC'}$ sont colinéaires $\iff \begin{vmatrix} x+1 & \frac{9}{2} \\ y+2 & \frac{11}{2} \end{vmatrix} = 0$

$\iff \frac{11}{2}(x+1)-\frac{9}{2}(y+2)=0$

$\times 2$ $\iff 11(x+1)-9(y+2)=0$ $\times 2$

$\iff 11x+11-9y-18=0$

$\iff \boxed{11x-9y-7=0}$

équation cartésienne de la droite (CC')

Les coordonnées de G vérifient donc le système :

$(S_G)\begin{cases} 10x+3y=25 & L_1 \\ 11x-9y=7 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 41x=82 & L_1 \leftarrow 3L_1+L_2 \\ 123y=205 & L_2 \leftarrow 11L_1-10L_2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{205}{123}=\frac{41\times 5}{41\times 3}=\frac{5}{3} \end{cases}$

$\boxed{G \text{ a pour coordonnées } \left(2;\frac{5}{3}\right)}$

Vérification ? Est-ce que G appartient bien à (BB') ?

B' est le milieu de $[AC]$ donc $B'\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)$

$B'\left(\frac{1+(-1)}{2};\frac{5+(-2)}{2}\right)$ $B'\left(0;\frac{3}{2}\right)$

$\vec{GB}\begin{pmatrix} x_B-x_G \\ y_B-y_G \end{pmatrix}$ $\vec{GB}\begin{pmatrix} 6-2 \\ 2-\frac{5}{3} \end{pmatrix}$ $\vec{GB}\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{6}{3}-\frac{5}{3} \end{pmatrix}$ $\vec{GB}\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$\vec{BB'}\begin{pmatrix} x_{B'}-x_B \\ y_{B'}-y_B \end{pmatrix}$ $\vec{BB'}\begin{pmatrix} 0-6 \\ \frac{3}{2}-2 \end{pmatrix}$ $\vec{BB'}\begin{pmatrix} -6 \\ \frac{3}{2}-\frac{4}{2} \end{pmatrix}$ $\vec{BB'}$

$\det(\vec{GB},\vec{BB'}) = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\times 4+6\times\frac{1}{3} = -2+2 = 0$

→ oui, G est bien sur la droite (BB'). Nous ne nous sommes pas trompés dans nos calculs.

2) Ω est le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

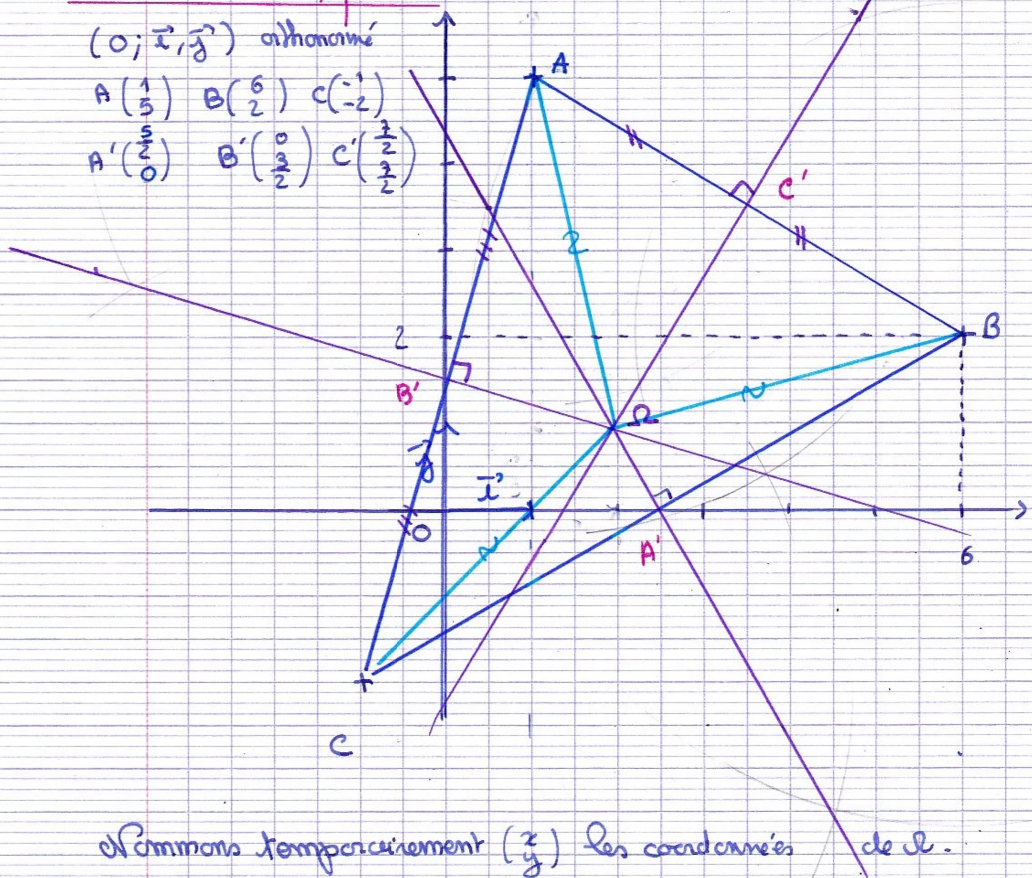
* Idée n° 1 : Ω est équidistant des points A, B, C, puisqu'il est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Suite de l'exercice 7, question 2.

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé

$A\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

$A'\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\0\end{pmatrix}$ $B'\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ $C'\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}$



Nommons temporairement $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ les coordonnées de Ω.

$\Omega A = \sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2} = \sqrt{x^2-2x+1+y^2-10y+25}$

$\boxed{\Omega A^2 = x^2+y^2-2x-10y+26}$

$\Omega B = \sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2} = \sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2}$

$\Omega B = \sqrt{x^2-12x+36+y^2-4y+4}$

$\boxed{\Omega B^2 = x^2+y^2-12x-4y+40}$

$\Omega C = \sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2} = \sqrt{x^2+2x+1+y^2+4y+4}$

$\boxed{\Omega C^2 = x^2+y^2+2x+4y+5}$

$\Omega A = \Omega B = \Omega C \Rightarrow \Omega A^2 = \Omega B^2 = \Omega C^2$

soit $x^2+y^2-2x-10y+26 = x^2+y^2-12x-4y+40 = x^2+y^2+2x+4y+5$

soit $\underbrace{-2x-10y+26 = -12x-4y+40}_{(E_1)}$ $= 2x+4y+5$, avec (E_2) : $-12x-4y+40 = 2x+4y+5$

(E_1) $-2x-10y+26 = -12x-4y+40$

$(E_1) \iff 10x-6y-14=0$ équation cartésienne de la médiatrice de [AB]

$(E_1) \iff \boxed{5x-3y-7=0}$

$(E_2) \iff -12x-4y+40 = 2x+4y+5$

$\iff \boxed{0 = 14x+8y-35}$

Équation cartésienne de la médiatrice de [BC].

Ω appartient à la médiatrice de [AB] et à celle de [BC] donc ses coordonnées sont solutions du système :

$(S_2)\begin{cases} 5x-3y=7 & L_1 \\ 14x+8y=35 & L_2 \end{cases}$

$(S_2) \iff \begin{cases} 82x = 161 & L_1 \leftarrow 8L_1+3L_2 \\ -82y = -77 & L_2 \leftarrow 14L_1-5L_2 \end{cases}$

$(S_2) \iff \begin{cases} x = \frac{161}{82} \\ y = \frac{77}{82} \end{cases}$

On trouve :

$\boxed{\Omega\left(\frac{161}{82}; \frac{77}{82}\right)}$

Suite de l'exercice 7, question 2.

* Idée n°2 : C'est une méthode qui nous servira pour les hauteurs aussi.

Ω appartient à la médiatrice de [AB], c'est à dire à la perpendiculaire à [AB] qui passe par son milieu C'.

Cette médiatrice est donc l'ensemble des points $M\binom{x}{y}$ du plan tels que $\overrightarrow{C'M} \perp \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{C'M}\begin{pmatrix} x_M - x_{C'} \\ y_M - y_{C'} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{C'M}\begin{pmatrix} x - \frac{7}{2} \\ y - \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-1 \\ 2-5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{C'M} \perp \overrightarrow{AB} \iff \underbrace{\left(x - \frac{7}{2}\right) \times 5 + \left(y - \frac{7}{2}\right) \times (-3) = 0}_{}$ ($\overrightarrow{C'M}.\overrightarrow{AB} = 0$)

2 vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$\iff 5x - \frac{35}{2} - 3y + \frac{21}{2} = 0$

$\iff 5x - 3y - \frac{14}{2} = 0$

$\iff \boxed{5x - 3y - 7 = 0}$

Nous retrouvons notre équation cartésienne de la médiatrice de [AB] !

Sans changer, je vais chercher celle de la médiatrice de [AC] (nous avions utilisé celle de [BC] dans l'idée n°1)

$M\binom{x}{y}$ appartiendra à la médiatrice de [AC] si et seulement si $\overrightarrow{B'M} \perp \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{B'M}\begin{pmatrix} x_M - x_{B'} \\ y_M - y_{B'} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{B'M}\begin{pmatrix} x \\ y - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1-1 \\ -2-5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{B'M}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\overrightarrow{B'M} \perp \overrightarrow{AC} \iff x \times (-2) + \left(y - \frac{3}{2}\right) \times (-7) = 0$

$\iff -2x - 7y + \frac{21}{2} = 0$

$\iff -4x - 14y + 21 = 0$

$\iff \boxed{4x + 14y - 21 = 0}$

équation cartésienne de la médiatrice de [AC]

Ω appartient à la médiatrice de [AB] et à celle de [AC], donc ses coordonnées vérifient le système :

$(S_3) \begin{cases} 5x - 3y = 7 & L_1 \\ 4x + 14y = 21 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 82x = 161 & L_1 \leftarrow 14L_1 + 3L_2 \\ -82y = -77 & L_2 \leftarrow 4L_1 - 5L_2 \end{cases}$

$(S_3) \iff \begin{cases} x = \frac{161}{82} \\ y = \frac{77}{82} \end{cases}$ On retrouve $\boxed{\Omega\left(\frac{161}{82} ; \frac{77}{82}\right)}$

3) L'orthocentre H du triangle ABC est le point de concours de ses hauteurs.

Je nomme (h_A), (h_B) et (h_C) les hauteurs respectivement issues de A, B et C du triangle ABC.

* Recherchons une équation de (h_A) : (h_A) est la perpendiculaire à (BC) qui passe par A.

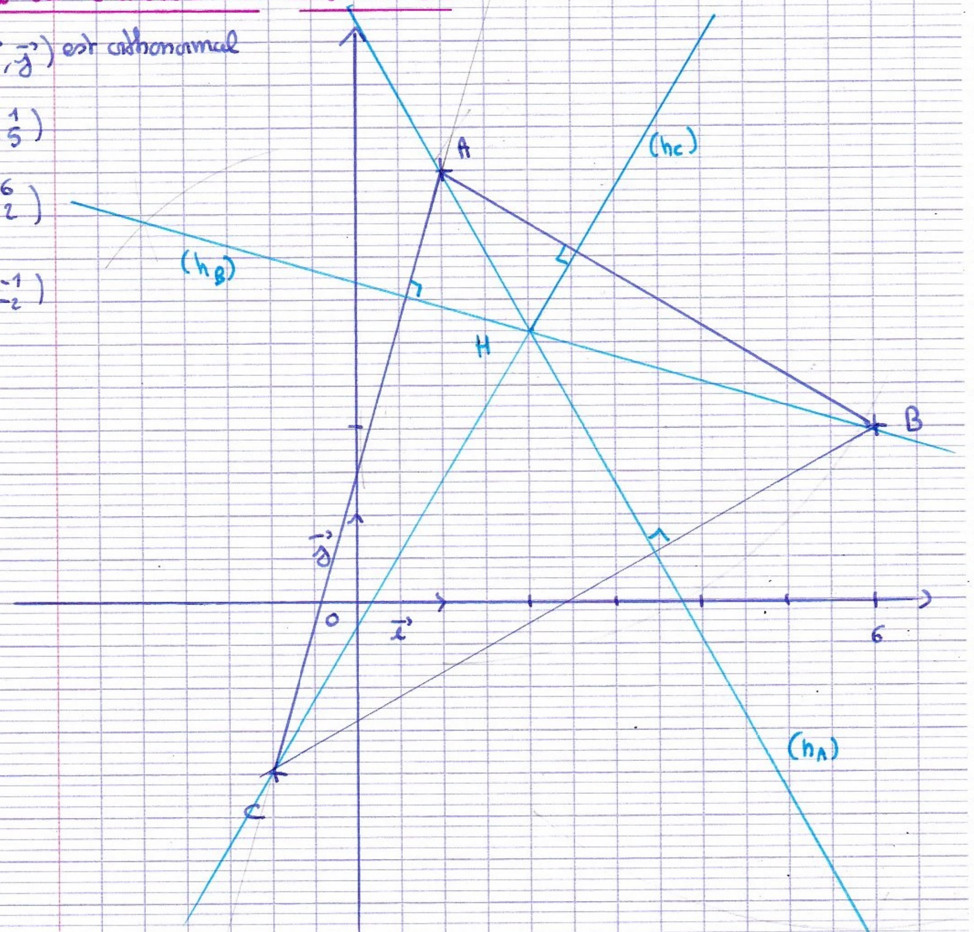
Suite de l'exercice 7 - Question 3 -

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormal

$A\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

$B\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

$C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$



$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (h_A) \iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M - x_A\\y_M - y_A\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-5\end{pmatrix}}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C - x_B\\y_C - y_B\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1-6\\-2-2\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-7\\-4\end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \iff (x-1)\times(-7) + (y-5)\times(-4) = 0$

$\iff -7x + 7 - 4y + 20 = 0$

$\iff -7x - 4y + 27 = 0$

$\iff \boxed{7x + 4y - 27 = 0}$ Équation cartésienne de (h_A)

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (h_B) \iff \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x_M - x_B\\y_M - y_B\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-6\\y-2\end{pmatrix}}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\y_C - y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-1\\-2-5\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-7\end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \iff (x-6)\times(-2) + (y-2)\times(-7) = 0$

$\iff -2x + 12 - 7y + 14 = 0$

$\iff -2x - 7y + 26 = 0$

$\iff \boxed{2x + 7y - 26 = 0}$

équation cartésienne de (h_B)

Ω appartient à (h_A) et à (h_B) donc ses coordonnées vérifient le système :

$$(S_1)\begin{cases}7x + 4y = 27 & L_1\\2x + 7y = 26 & L_2\end{cases} \iff \begin{cases}41x = 85 & L_1 \leftarrow 7L_1 - 4L_2\\-41y = -128 & L_1 \leftarrow 2L_1 - 7L_2\end{cases}$$

$$(S_1) \iff \begin{cases}x = \frac{85}{41}\\y = \frac{128}{41}\end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{H\left(\frac{85}{41}; \frac{128}{41}\right)}$$

J'ajoute en complément pour le cas où vous auriez calculé une équation cartésienne de (h_C) :

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (h_C) \iff \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x_M - x_C\\y_M - y_C\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+1\\y+2\end{pmatrix}}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-1\\2-5\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0 \iff (x+1)\times 5 + (y+2)\times(-3) = 0$

$\iff 5x + 5 - 3y - 6 = 0$

$\iff \boxed{5x - 3y - 1 = 0}$

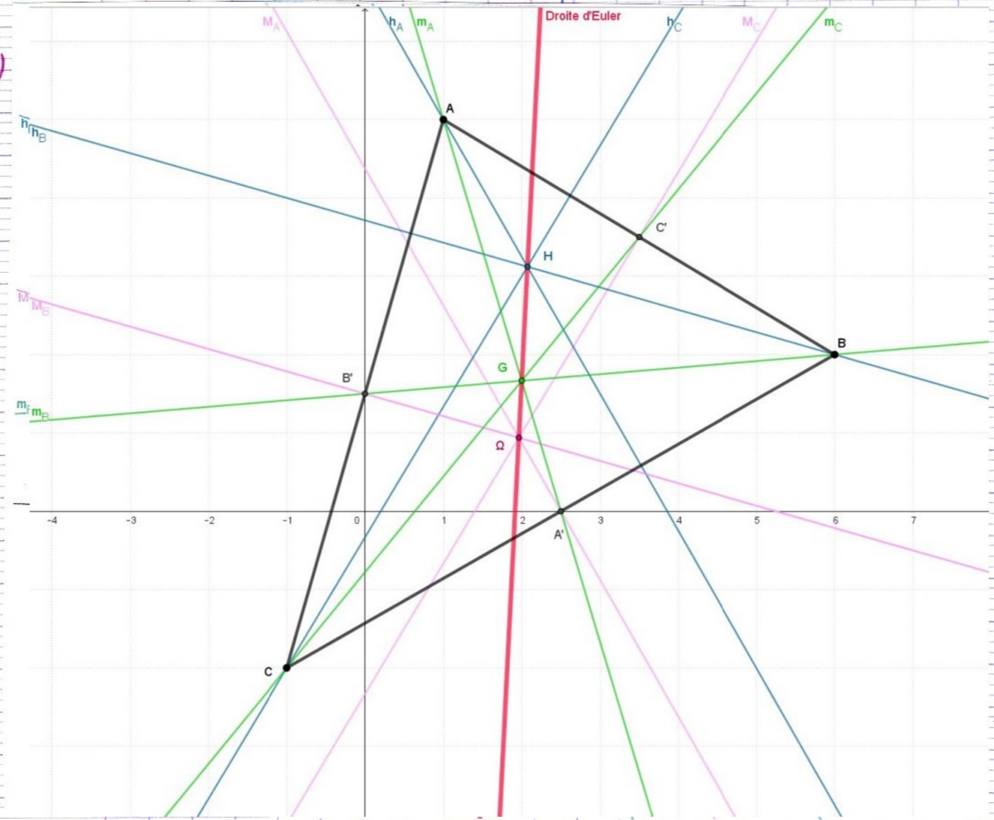
équation cartésienne de h_C

Suite de l'exercice 7 - question 3. Vérifions que $H\left(\frac{85}{41}\,;\,\frac{128}{41}\right)$ appartient bien à (h_C) d'équation : $5x-3y-1=0$

$$5\times\frac{85}{41}-3\times\frac{128}{41}-1=\frac{425}{41}-\frac{384}{41}-\frac{41}{41}=0$$

oui, H appartient bien à la droite d'équation $5x-3y-1=0$

4)



$G\begin{pmatrix}2\\ \frac{5}{3}\end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix}\frac{85}{41}\\ \frac{128}{41}\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}\frac{85}{41}-2\\ \frac{128}{41}-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}\frac{3}{41}\\ \frac{179}{123}\end{pmatrix}$

$$\frac{85}{41}-2=\frac{85}{41}-\frac{82}{41}=\frac{3}{41}$$

$$\frac{128}{41}-\frac{5}{3}=\frac{128\times3}{41\times3}-\frac{5\times41}{3\times41}=\frac{384}{123}-\frac{205}{123}=\frac{179}{123}$$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in(GH)\iff\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires.

avec $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}x-2\\ y-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}\frac{3}{41}\\ \frac{179}{123}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{GH}$ colinéaires $\iff\begin{vmatrix}x-2 & \frac{3}{41}\\ y-\frac{5}{3} & \frac{179}{123}\end{vmatrix}=0$

$$\iff\frac{179}{123}(x-2)-\frac{3}{41}\left(y-\frac{5}{3}\right)=0$$

$$\iff\frac{179x}{123}-\frac{358}{123}-\frac{3y\times3}{41\times3}+\frac{15}{123}=0$$

$\times123$ $\qquad$ $\times123$

$$\iff179x-358-9y+15=0$$

$$\iff\boxed{179x-9y-343=0}$$

équation cartésienne de la droite (GH).

$\Omega\left(\frac{161}{82}\,;\,\frac{77}{82}\right)$ appartient-il à (GH) ?

$$179\times\frac{161}{82}-9\times\frac{77}{82}-343=\underbrace{\frac{28\,819}{82}-\frac{693}{82}}-\frac{343\times82}{82}$$

$$=\frac{28\,126}{82}-\frac{28\,126}{82}$$

$$=0$$

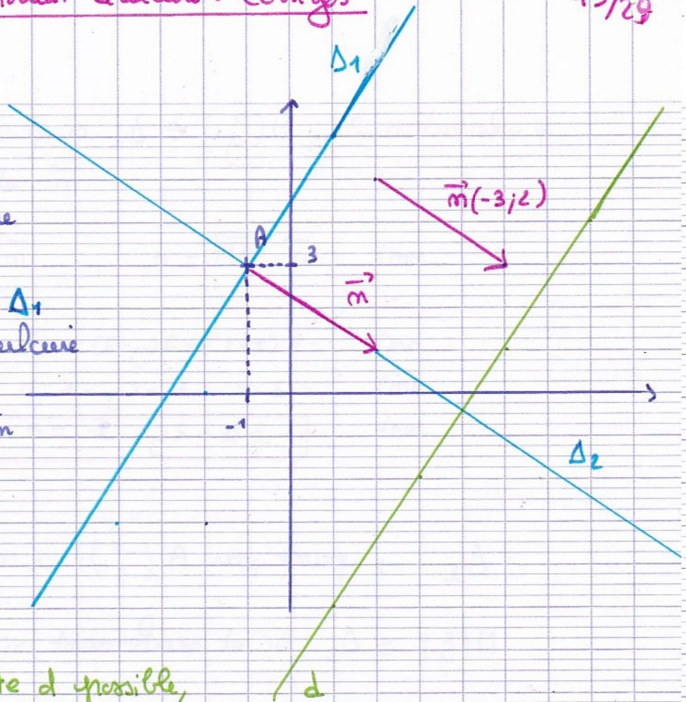
Oui, Ω appartient bien à la droite (GH).

Les points H, G, Ω sont donc alignés.

Remarque : On pouvait aussi, pour vérifier cet alignement, utiliser la colinéarité, en prouvant par exemple que $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{G\Omega}$ sont colinéaires.

Exercice 8. 1)

On ne sait pas précisément où se situe d : on sait juste
- qu'elle est parallèle à Δ_1
- qu'elle est perpendiculaire à Δ_2
- qu'elle est de direction perpendiculaire à celle de $\vec{n}$ puisque $\vec{n}$ est un de ses vecteurs normaux.



J'ai donc tracé une droite d possible, mais toute droite parallèle à celle-ci convient aussi.

Δ_1 → passe par $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

→ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

Rédaction 1

* Elle admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$-3x+2y+c=0$$

Les coordonnées de A vérifient cette équation, donc :

$$-3x_A+2y_A+c=0$$

soit $-3\times(-1)+2\times3+c=0$

soit $3+6+c=0$

soit $c=-9$

Δ_1 a donc pour équation cartésienne $\boxed{-3x+2y-9=0}$

* Rédaction 2 : $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\Delta_1$ si et seulement si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux

soit $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ $\quad\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix}$

soit $-3(x+1)+2(y-3)=0$

soit $-3x-3+2y-6=0$

soit $\boxed{-3x+2y-9=0}$ équation cartésienne de Δ_1

Δ_2 → passe par $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ → admet pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\Delta_2$ si et seulement si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

soit $\det(\vec{n},\overrightarrow{AM})=0$

soit $\begin{vmatrix}-3 & x+1\\2 & y-3\end{vmatrix}=0$

soit $-3(y-3)-2(x+1)=0$

soit $-3y+9-2x-2=0$

soit $\boxed{-2x-3y+7=0}$ équation cartésienne de Δ_2

autre rédaction possible : $\vec{n}\begin{pmatrix}-3 \leftarrow -b\\2 \leftarrow a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ_2.

Δ_2 admet donc une équation cartésienne de la forme :

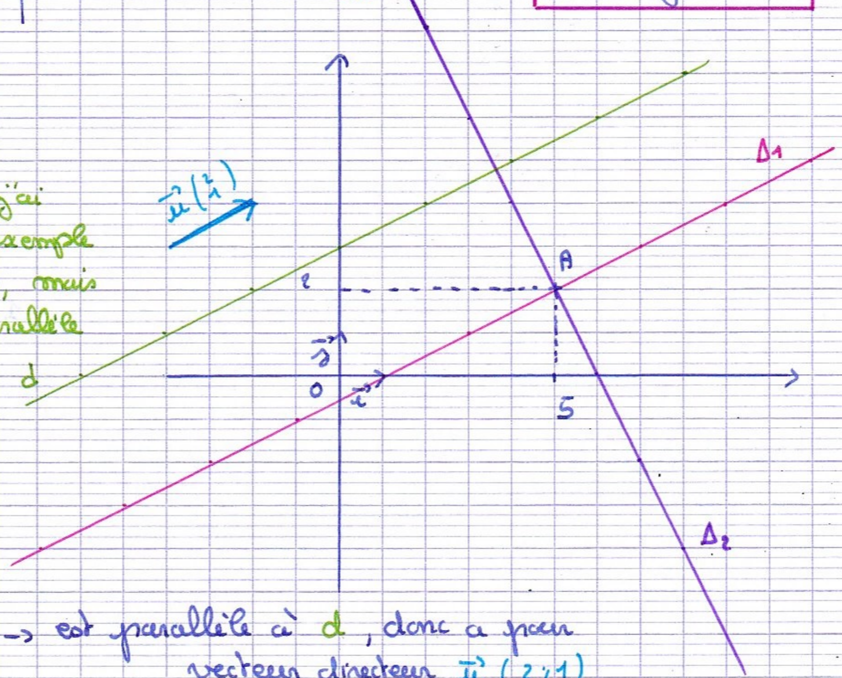
$2x+3y+c=0$. $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\in\Delta_2$ donc

Suite de l'exercice 8, question 1. $2\times(-1)+3\times 3+c=0$

soit $-2+9+c=0$ soit $c=-7$

Une équation cartésienne de Δ_2 est donc $\boxed{2x+3y-7=0}$

2)



Ici encore, j'ai tracé un exemple de droite d, mais toute droite parallèle à celle-ci convient.

Δ_1 → est parallèle à d, donc a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;1)$ (2 : $-b$; 1 : a)

→ passe par $A\binom{5}{2}$

Δ_1 admet donc une équation de la forme $1x-2y+c=0$.

Comme $A\binom{5}{2}\in\Delta_1$, on a : $1\times 5-2\times 2+c=0$

soit $5-4+c=0$

soit $c=-1$

→ Une équation cartésienne de Δ_1 est donc :

$$\boxed{x-2y-1=0}$$

Autre rédaction possible : $M\in\Delta_1 \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$M\binom{x}{y}$ $A\binom{5}{2}$ donc $\overrightarrow{AM}\binom{x-5}{y-2}$ et $\vec{u}\binom{2}{1}$

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires $\iff \det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0$

$\iff \begin{vmatrix} x-5 & 2 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix}=0$

$\iff (x-5)\times 1-2\times(y-2)=0$

$\iff x-5-2y+4=0$

$\iff \boxed{x-2y-1=0}$

Une équation cartésienne de Δ_1.

Δ_2 → a pour vecteur normal $\vec{u}\binom{2}{1}$ (2 : a ; 1 : b)

→ passe par $A\binom{5}{2}$

Δ_2 admet une équation cartésienne de la forme :

$2x+y+c=0$

$A\binom{5}{2}\in\Delta_2$ donc $2\times 5+2+c=0$

donc $12+c=0$

donc $c=-12$

Une équation cartésienne de Δ_2 est donc :

$$\boxed{2x+y-12=0}$$

Autre rédaction possible :

Suite de l'exercice 8 (question 2) $M\binom{x}{y} \in \Delta_2 \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{u}$

$\iff \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$

$\overrightarrow{AM}\binom{x-5}{y-2}$ et $\vec{u}\binom{2}{1}$

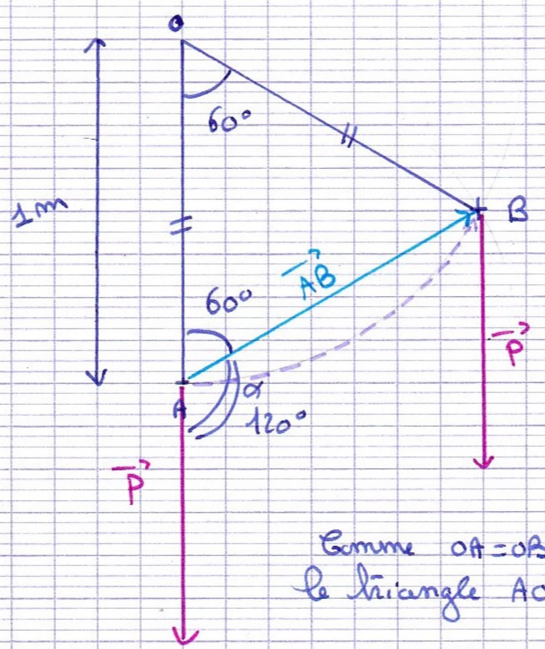
$\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 \iff (x-5)\times 2 + (y-2)\times 1 = 0$

$\iff 2x - 10 + y - 2 = 0$

$\iff \boxed{2x + y - 12 = 0}$

équation cartésienne de Δ_2

Exercice 9.



Comme $OA = OB$ et $\widehat{AOB} = 60°$, le triangle AOB est équilatéral.

Ses angles sont donc tous de 60°, en particulier $\widehat{OAB}$.

L'angle (géométrique) formé par $\vec{P}$ et $\overrightarrow{AB}$, que je nomme α, est donc supplémentaire à $\widehat{OAB}$ puisque (OA) et $\vec{P}$ sont de direction verticale.

Donc $\alpha = 180° - 60° = 120°$ ou $\frac{2\pi}{3}$ rad

Le travail de $\vec{P}$ pour le déplacement de A en B est donc égal à :

$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB}$

$= \|\vec{P}\| \times AB \times \cos(\vec{P};\overrightarrow{AB})$

$\approx \underbrace{3 \times 9{,}81}_{} \times 1 \times \underbrace{\cos 120°}_{-\frac{1}{2}}$

$P = mg$ — 3 kg ; 9,81 m.s^{-2}

kg

accélération de la pesanteur en m.s^{-2} (valeur approximative)

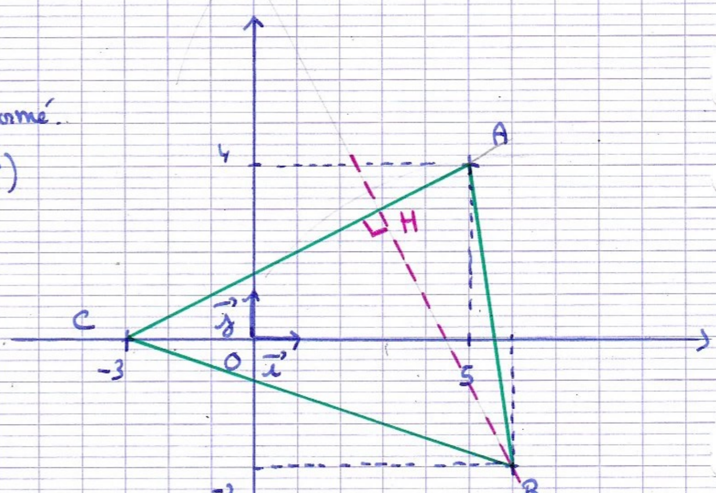
m

$\boxed{W_{AB}(\vec{P}) \approx -14{,}715 \text{ J}}$

Il s'agit d'un travail résistant, puisqu'il est négatif.

Exercice 10

* $(O;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé.
* $A\binom{5}{4}$ $B\binom{6}{-3}$ $C\binom{-3}{0}$



1) $\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$

$\overrightarrow{AB}\binom{6-5}{-3-4}$

$\boxed{\overrightarrow{AB}\binom{1}{-7}}$

$\overrightarrow{AC}\binom{x_C - x_A}{y_C - y_A}$ $\overrightarrow{AC}\binom{-3-5}{0-4}$ $\boxed{\overrightarrow{AC}\binom{-8}{-4}}$

Suite de l'exercice 10 (question 1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1\times(-8) + (-7)\times(-4)$

$= -8 + 28$

$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 20}$

2) $AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$

$= \sqrt{(-3-5)^2+(0-4)^2}$

$= \sqrt{(-8)^2+(-4)^2}$

$= \sqrt{64+16}$

$= \sqrt{80}$

$= \sqrt{16\times 5}$

$= \sqrt{16}\times\sqrt{5}$ $\boxed{AC = 4\sqrt{5}}$

H est le projeté orthogonal de B sur (AC) donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$

On sait d'une part (question 1) que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 20$

et d'autre part que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = AH\times AC$
$= AH\times 4\sqrt{5}$

car les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même direction et même sens

en toute rigueur, il faudrait le prouver !
= prouver que H est sur la demi-droite [AC)

→ oui, ils ont même sens car $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$
donc l'angle $\widehat{CAB}$ est aigu. C'est pourquoi B se projette bien sur la demi-droite [AC) et non de l'autre côté de A.

On a donc : $20 = AH \times 4\sqrt{5}$

soit $\dfrac{20}{4\sqrt{5}} = AH$

soit $AH = \dfrac{\cancel{4}\times 5\times\sqrt{5}}{\cancel{4}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

J'ai décomposé 20 en 4×5 et en même temps multiplié le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{5}$.

soit $AH = \dfrac{\cancel{5}\sqrt{5}}{\cancel{5}}$ donc $\boxed{AH = \sqrt{5}}$ C.Q.F.D.

3) $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$= \sqrt{(6-5)^2+(-3-4)^2}$

$= \sqrt{1^2+(-7)^2}$

$AB = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = \sqrt{25}\times\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle A'HB rectangle en H :

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ soit $50 = 5 + BH^2$
soit $45 = BH^2$

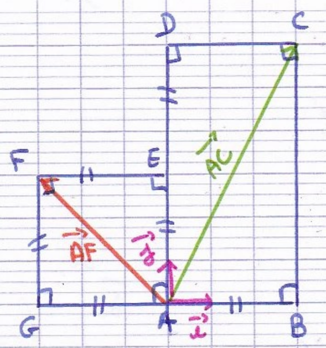
d'où $\boxed{BH} = \sqrt{45} = \sqrt{9\times 5} = \sqrt{9}\times\sqrt{5} = \boxed{3\sqrt{5}}$

4) $Aire_{ABC} = \dfrac{1}{2}\times BH\times AC = \dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}$

$= \dfrac{3\times 2\times \cancel{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\cancel{2}}$

$\boxed{Aire_{ABC} = 15}$

Exercice 11



1) Copie 1 : "F et C se projettent orthogonalement en E et D sur (AD)" certes, mais quand on calcule un produit scalaire, il faut projeter un vecteur sur la direction de l'autre et pas projeter les 2 sur une 3ème direction.

Copie 2 : Le repère choisi n'est pas orthonormé dans le sens où les vecteurs de base $\vec{AB}$ et $\vec{AE}$ ne sont pas unitaires.
En fait si, il est orthonormé, mais il ne respecte pas l'unité de l'exercice, car $AB = AE = 3$.

2) On pose $\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{3}\vec{AE}$.

$(A ; \vec{i}, \vec{j})$ est alors un repère orthonormé.

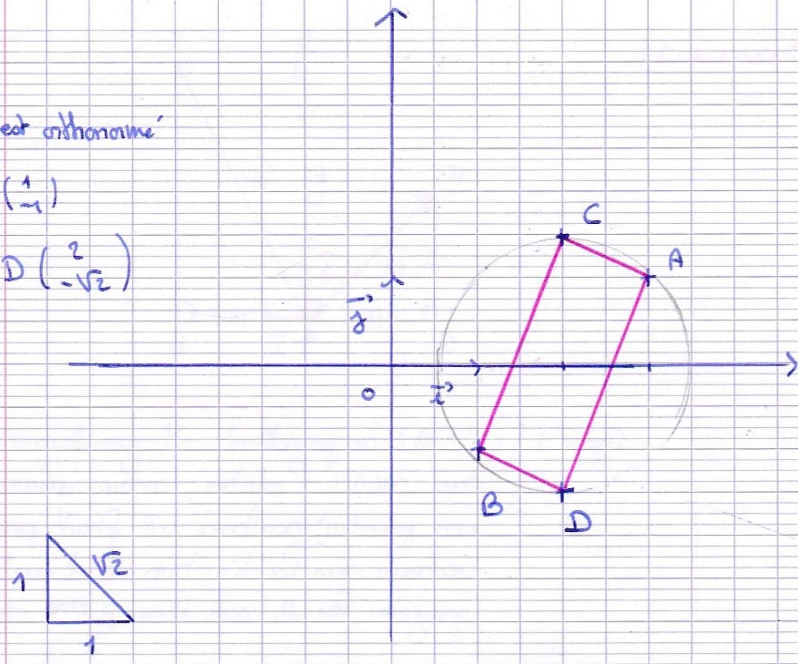
$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $F(-3;3)$ et $C(3;6)$ $\vec{AF}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

$\vec{AF}\cdot\vec{AC} = -3\times 3 + 3\times 6 = 3\times(-3+6) = 9$

$\boxed{\vec{AF}\cdot\vec{AC} = 9}$

Exercice 12.

* $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé
* $A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}2\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$



1) $\vec{BC}\begin{pmatrix}x_C - x_B\\y_C - y_B\end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix}2-1\\\sqrt{2}-(-1)\end{pmatrix}$ $\boxed{\vec{BC}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}}$

$\vec{DA}\begin{pmatrix}x_A - x_D\\y_A - y_D\end{pmatrix}$ $\vec{DA}\begin{pmatrix}3-2\\1-(-\sqrt{2})\end{pmatrix}$ $\boxed{\vec{DA}\begin{pmatrix}1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}}$

$\vec{BD}\begin{pmatrix}2-1\\-\sqrt{2}-(-1)\end{pmatrix}$ $\boxed{\vec{BD}\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}}$

2) $\vec{BC}\cdot\vec{BD} = 1\times 1 + (\sqrt{2}+1)(1-\sqrt{2})$
$= 1 + \cancel{\sqrt{2}} + 1 - 2 - \cancel{\sqrt{2}}$
$\vec{BC}\cdot\vec{BD} = 0$

3) $BC = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1}$

$\boxed{BC = \sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

Suite de l'exercice 12. $BD = \sqrt{1^2 + (1-\sqrt{2})^2}$

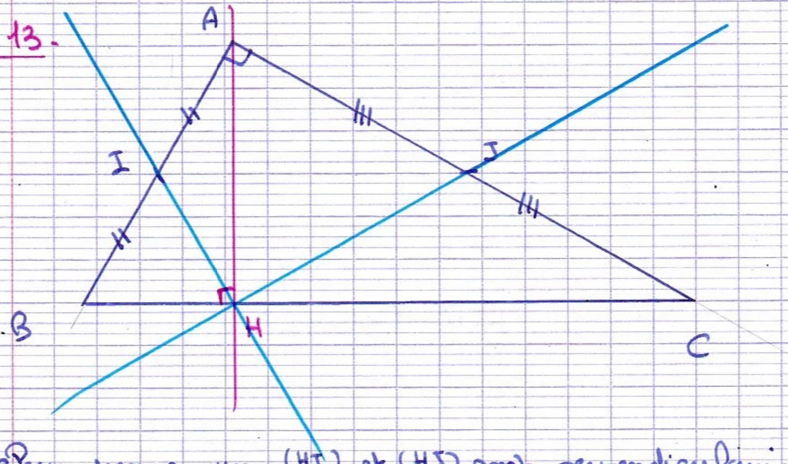
$= \sqrt{1 + 1 + 2 - 2\sqrt{2}}$

$$\boxed{BD = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

4) La question 1 nous informe que $\vec{BC} = \vec{DA}$

La question 2 nous informe que l'angle $\widehat{CBD}$ est droit, puisque, d'après la question 3, ni $\vec{BC}$ ni $\vec{BD}$ ne sont nuls. Le quadrilatère ACBD est un parallélogramme avec un angle droit, c'est-à-dire un rectangle.

Exercice 13.



Pour prouver que (HI) et (HJ) sont perpendiculaires, essayons de prouver que $\vec{HI}.\vec{HJ} = 0$

$\vec{HI}.\vec{HJ} = (\vec{HA} + \vec{AI}).(\vec{HA} + \vec{AJ})$ d'après la relation de Chasles.

$= \vec{HA}.\vec{HA} + \vec{HA}.\vec{AJ} + \vec{AI}.\vec{HA} + \vec{AI}.\vec{AJ}.$

$= HA^2 + \vec{HA}.\frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB}.\vec{HA} + 0$

car J est le milieu de [AC]

car I est le milieu de [AB]

car ABC est rectangle en A, $I \in (AB)$, $J \in (AC)$ l'angle $\widehat{IAJ}$ est droit.

donc $\vec{HI}.\vec{HJ} = HA^2 + \frac{1}{2}(\vec{HA}.\vec{AC}) + \frac{1}{2}(\vec{HA}.\vec{AB})$

H est le projeté orthogonal de C et aussi de B sur (AH), puisque H est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.

donc $\vec{HI}.\vec{HJ} = HA^2 + \frac{1}{2}\vec{HA}.\vec{AH} + \frac{1}{2}\vec{HA}.\vec{AH}$

$= HA^2 - \frac{1}{2}HA^2 - \frac{1}{2}HA^2$

$\boxed{\vec{HI}.\vec{HJ} = 0}$ → et comme $\vec{HI}$ et $\vec{HJ}$ sont non nuls, on a bien $(HI) \perp (HJ)$.

Exercice 14. 1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

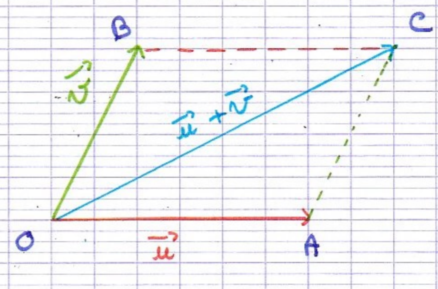
2) $(\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \cancel{2\vec{u}.\vec{v}} + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - \cancel{2\vec{u}.\vec{v}} + \|\vec{v}\|^2$

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2}$$

$(\vec{u} + \vec{v})^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2 = (\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2) - (\|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2)$

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v})^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2 = 4\vec{u}.\vec{v}}$$

3)



4) OACB est un parallélogramme car $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ (c'est la caractérisation du parallélogramme par une somme de vecteurs : voir cours de 2nde)

Suite de l'exercice 14. 5) $\vec{u}-\vec{v} = \vec{OA}-\vec{OB}$
$= \vec{OA}+\vec{BO}$
$= \vec{BO}+\vec{OA}$

$\boxed{\vec{u}-\vec{v} = \vec{BA}}$ d'après la relation de Chasles

6) La question 2) nous dit que, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$(\vec{u}+\vec{v})^2+(\vec{u}-\vec{v})^2 = 2\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{v}\|^2$$

Sur notre figure, on a : $\vec{u}=\vec{OA}$ $\quad \vec{v}=\vec{OB}$
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{OC}$ $\quad \vec{u}-\vec{v}=\vec{BA}$

En remplaçant, on obtient :

$$OC^2+BA^2 = 2OA^2+2OB^2$$

et comme $BA=AB$, on a bien :

$$\boxed{2OA^2+2OB^2 = OC^2+AB^2}$$ C.Q.F.D

7) Voici la deuxième égalité obtenue à la question 2) :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2-(\vec{u}-\vec{v})^2 = 4\vec{u}.\vec{v}$$

qui donne, avec les points : $OC^2 - AB^2 = 4\vec{OA}.\vec{OB}$

Si OABC est un rectangle, c'est que l'angle $\widehat{BOA}$ est droit, donc $\vec{OA}.\vec{OB}=0$. Et dans ce cas, d'après l'égalité ci-dessus :
$OC^2-AB^2=0 \Leftrightarrow OC^2=AB^2 \Leftrightarrow OC=AB$
car $OC\geq 0$ et $AB\geq 0$ puisque ce sont des longueurs.

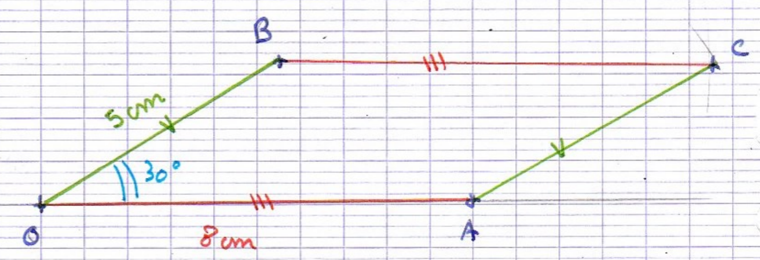
On retrouve que les diagonales d'un rectangle sont de même longueur.

8) $\vec{OC}.\vec{AB} = (\vec{OA}+\vec{AC}).(\vec{AO}+\vec{OB})$ d'après la relation de Chasles
$= (\vec{OA}+\vec{OB}).(-\vec{OA}+\vec{OB})$ car $\vec{AC}=\vec{OB}$ puisque OACB est un parallélogramme
$= \vec{OA}.(-\vec{OA})+\vec{OB}.(-\vec{OA})+\vec{OA}.\vec{OB}+\vec{OB}.\vec{OB}$
$= -\vec{OA}^2-\vec{OB}.\vec{OA}+\vec{OA}.\vec{OB}+\vec{OB}^2$

donc $\boxed{\vec{OC}.\vec{AB} = OB^2-OA^2}$ C.Q.F.D

Si OACB est un losange, c'est qu'il a 2 côtés consécutifs de même longueur : on a $OA=OB$, donc $OB^2-OA^2=0$. D'après l'égalité ci-dessus, on a alors $\vec{OC}.\vec{AB}=0$ donc les diagonales (OC) et (AB) sont perpendiculaires.

9)



a) $\vec{OA}.\vec{OB} = OA \times OB \times \cos 30°$
$= 8 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{\vec{OA}.\vec{OB} = 20\sqrt{3}}$$

b) $OC^2 = (\vec{OA}+\vec{OB})^2 = OA^2+2\vec{OA}.\vec{OB}+OB^2$

Suite de l'exercice 14 (question 9b) Donc $OC^2 = 8^2 + 2\times 20\sqrt{3} + 5^2$
$= 64 + 40\sqrt{3} + 25$

$$\boxed{OC^2 = 89 + 40\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} AB^2 = BA^2 &= (\vec{OA} - \vec{OB})^2 \\ &= \vec{OA}^2 - 2\vec{OA}.\vec{OB} + \vec{OB}^2 \\ &= 8^2 - 2\times 20\sqrt{3} + 5^2 \\ &= 64 - 40\sqrt{3} + 25 \end{aligned}$$

$$\boxed{AB^2 = 89 - 40\sqrt{3}}$$

D'où $OC = \sqrt{89+40\sqrt{3}}$ et $AB = \sqrt{89-40\sqrt{3}}$

$OC \simeq 12,58$ cm $AB \simeq 4,44$ cm

c) On a vu à la question 8 que $\vec{OC}.\vec{AB} = OB^2 - \vec{OA}^2$

On a donc : $\vec{OC}.\vec{AB} = 5^2 - 8^2$
$= 25 - 64$

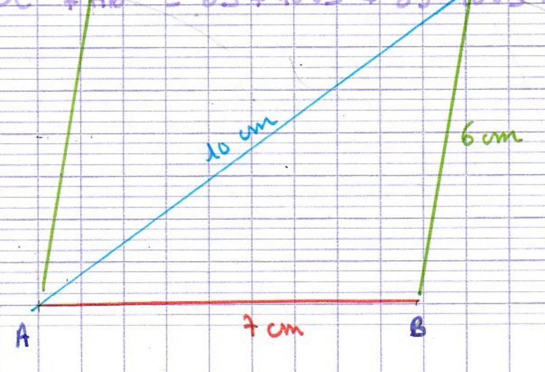
$$\boxed{\vec{OC}.\vec{AB} = -39}$$

Je vérifie l'égalité de la question 6) :

$2OA^2 + 2OB^2 = 2\times 8^2 + 2\times 5^2 = 2\times 64 + 2\times 25 = 128 + 50 = 178$

$OC^2 + AB^2 = 89 + \cancel{40\sqrt{3}} + 89 - \cancel{40\sqrt{3}} = 89 + 89 = 178$ ok

10)



On a vu à la question 2) que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 + (\vec{u}-\vec{v})^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$$

On pose $\vec{u} = \vec{AB}$ $\vec{v} = \vec{AD}$

On a : $\vec{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{AB} = -\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} - \vec{v}$.

En remplaçant, on obtient :

$$AC^2 + BD^2 = 2\,AB^2 + 2\,AD^2$$

soit, ici : $10^2 + BD^2 = 2\times 7^2 + 2\times 6^2$ car AD = BC puisque ABCD est un parallélogramme.

soit $100 + BD^2 = 2\times 49 + 2\times 36$

soit $BD^2 = 98 + 72 - 100$

soit $BD^2 = 70$ d'où $\boxed{BD = \sqrt{70} \simeq 8,37 \text{ cm}}$

Exercice 15. $F_1 = 300$ N $F_2 = 200$ N $(\widehat{\vec{F_1}, \vec{F_2}}) = 50°$

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

On sait que, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

d'où, ici : $\vec{F_1}.\vec{F_2} = \frac{1}{2}\left(\vec{R}^2 - \vec{F_1}^2 - \vec{F_2}^2\right)$ (1)

Or $\vec{F_1}.\vec{F_2} = 300 \times 200 \times \cos 50°$ (2)

Suite de l'exercice 15.

Ce qui nous donne, en identifiant les 2nds membres des égalités (1) et (2) :

$$300 \times 200 \times \cos 50° = \frac{1}{2}\left(\vec{R}^2 - 300^2 - 200^2\right)$$

$\times 2$ ... $\times 2$

soit $3000 \times \cos 50° = \vec{R}^2 - 90\,000 - 40\,000$

soit $90\,000 + 40\,000 + 3000 \cos 50° = \vec{R}^2$

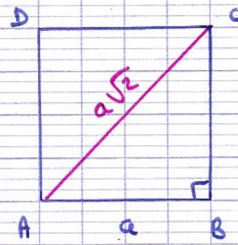
$$\boxed{\vec{R}^2 = 130\,000 + 3000 \cos 50°}$$

$\vec{R}^2 \approx 131\,928 \text{ N}^2$

2) $$\boxed{R = \sqrt{130\,000 + 3000 \cos 50°}}$$

$R \approx 363 \text{ N}$

Exercice 16 1) a) ABCD est un carré de côté a.



D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC rectangle en B, on a :

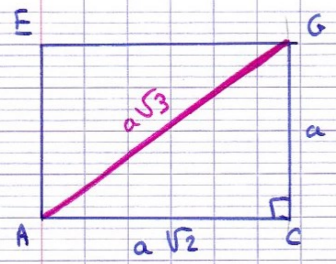
$AC^2 = AB^2 + BC^2$

soit $AC^2 = a^2 + a^2$

soit $AC^2 = 2a^2$

soit $AC = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2}$

$$\boxed{AC = a\sqrt{2}}$$



Dans le triangle ACGE rectangle en C, on a :

$CG = a$ (côté du cube)

$AC = a\sqrt{2}$

D'après le théorème de Pythagore :

$AG^2 = AC^2 + CG^2$

$AG^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$

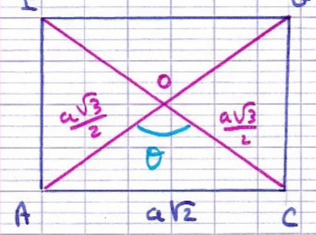
$AG^2 = 2a^2 + a^2$

$AG^2 = 3a^2$

donc $AG = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}\sqrt{a^2}$

soit $\boxed{AG = a\sqrt{3}}$

b)



Dans le triangle OAC, on a :

$OA = OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ car O est le milieu de AG et de EC, diagonales du rectangle qui mesurent $a\sqrt{3}$.

$\vec{OA}.\vec{OC} = \frac{1}{2}(OA^2 + OC^2 - AC^2)$

car $\vec{OA} - \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{CO} = \vec{CO} + \vec{OA} = \vec{CA}$ et $\vec{CA}^2 = \vec{AC}^2$

$$\vec{OA}.\vec{OC} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2\right]$$

$$\vec{OA}.\vec{OC} = \frac{1}{2}\left[\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2a^2\right]$$

$$\vec{OA}.\vec{OC} = \frac{1}{2}\left[\frac{2 \times 3a^2}{4} - \frac{4a^2}{2}\right]$$

$$\vec{OA}.\vec{OC} = \frac{1}{2}\left[\frac{3a^2}{2} - \frac{4a^2}{2}\right]$$

Suite de l'exercice 16 - 1) b) $\vec{OA}.\vec{OC} = \frac{1}{2}\left[-\frac{a^2}{2}\right]$

donc $\vec{OA}.\vec{OC} = -\frac{a^2}{4}$

→ Visiblement, ce n'est pas ce que l'énoncé attendait, puisque c'est ce qu'il nous fait prouver ensuite, à la question 2/b). Je vais donc utiliser la définition du produit scalaire avec le cosinus.

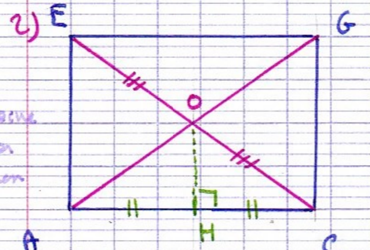
Dans le triangle AOC, on a : $OA = OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

et $\widehat{AOC} = \theta$

Donc $\vec{OA}.\vec{OC} = OA \times OC \times \cos\widehat{AOC}$

$= \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \cos\theta$

On a bien : $\boxed{\vec{OA}.\vec{OC} = \frac{3a^2}{4}\cos\theta}$ C.Q.F.D

2) 

Pas la peine de préciser tout cela à mon avis.

a) $\vec{OA} = \vec{OH} + \vec{HA}$

d'après la relation de Chasles.

$\vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{EC}^{(1)} = \frac{1}{2}(\vec{EA} + \vec{AC})$

d'après la relation de Chasles.

$\vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{EA} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

$\vec{OC} = \vec{OH}^{(2)} - \vec{HA}^{(3)}$

(1) car O est le milieu de [EC]

(2) $\vec{OH} = \frac{1}{2}\vec{EA}$ car $(OH) \perp (AC)$ donc $(OH) // (EA)$ et en appliquant le théorème de Thalès dans les triangles CEA et COH :

* $O \in (EC)$ * $H \in (AC)$
* $(OH) // (EA)$ donc $\frac{CH}{CA} = \frac{OH}{EA}$ et comme $\frac{CH}{CA} = \frac{1}{2}$, on a $OH = \frac{1}{2}EA$

(3) car H est le milieu de [AC]. Dans le triangle AOC isocèle en O, la médiane (OH) est aussi hauteur.

b) $\vec{OA}.\vec{OC} = (\vec{OH} + \vec{HA}).(\vec{OH} - \vec{HA})$

$= \vec{OH}.\vec{OH} - \vec{OH}.\vec{HA} + \vec{HA}.\vec{OH} - \vec{HA}.\vec{HA}$

$\vec{OA}.\vec{OC} = OH^2 - HA^2$ avec : $OH = \frac{a}{2}$ et $HA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

donc $\vec{OA}.\vec{OC} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$= \frac{a^2}{4} - \frac{2a^2}{4}$

$\boxed{\vec{OA}.\vec{OC} = -\frac{a^2}{4}}$ C.Q.F.D

3) $\left.\begin{array}{l}\vec{OA}.\vec{OC} = \frac{3}{4}a^2\cos\theta \\ \text{et } \vec{OA}.\vec{OC} = -\frac{a^2}{4}\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\frac{3}{4}a^2\cos\theta = -\frac{a^2}{4}}$ (E)

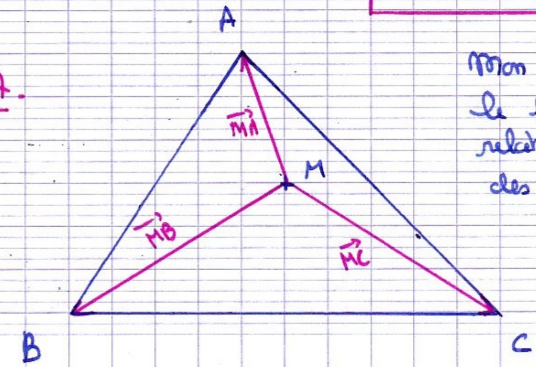
(E) $\Leftrightarrow$ $3\cos\theta = -1$ en multipliant les 2 membres par 4 et en les divisant par a^2

(E) $\Leftrightarrow$ $\boxed{\cos\theta = -\frac{1}{3}}$

$\theta = \text{Acos}\left(-\frac{1}{3}\right)$

$\boxed{\theta \approx 109,5°}$

Exercice 17.



Mon idée : essayer d'exprimer le 1er membre de la relation juste à l'aide des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AM}$, avec la relation de Chasles.

Suite de l'exercice 17. J'appelle s le nombre $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}$

Je cherche à montrer que $s=0$.

$$s = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}$$

$$s = \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB}$$

d'après la relation de Chasles.

$$s = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

$$s = \underbrace{\overrightarrow{MA}.\underbrace{(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})}_{\vec{0}}}_{0} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

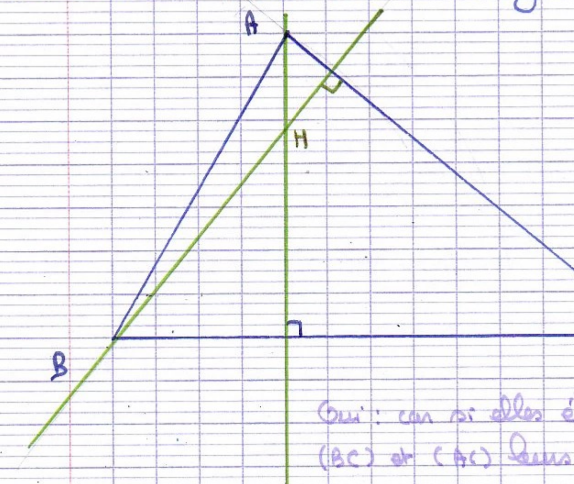
$$s = 0 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

car $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

$$s = 0 + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\underbrace{(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC})}_{\vec{0}}}_{0}$$

$\boxed{s=0}$ C.Q.F.D

Maintenant, quel peut être le rapport avec le point de concours des hauteurs d'un triangle ?



Soit ABC un triangle. Je nomme H le point d'intersection entre la hauteur issue de A et la hauteur issue de B.

Ces 2 hauteurs sont-elles nécessairement sécantes ?

Oui : car si elles étaient parallèles, comme (BC) et (AC) leur seraient respectivement perpendiculaires, on aurait (AC) // (BC) et le triangle ABC serait "aplati", c'est-à-dire que les points A, B et C seraient alignés. Comme on parle de "triangle", cela suppose que les points A, B et C ne sont pas alignés. Les hauteurs issues de A et de B sont donc concourantes.

On pourrait aussi avoir A = H si le triangle est rectangle en A ou B = H si le triangle est rectangle en B. Mais dans ce cas, on a bien, aussi, $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0$ et $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}=0$

On vient de prouver que, pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$$

C'est vrai en particulier pour notre point H, intersection des hauteurs issues de A et de B dans le triangle ABC :

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$$

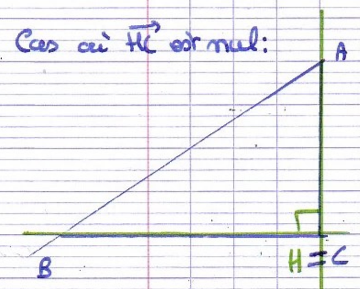
(AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC, donc (AH) et (BC) sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0$

(BH) est la hauteur issue de B du triangle ABC, donc (BH) et (AC) sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}=0$.

On a donc : $\underbrace{\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}}_{0} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$

donc $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0 \Longrightarrow$ l'un des 2 vecteurs est nul ou $(HC) \perp (AB)$

Cas où $\overrightarrow{HC}$ est nul :

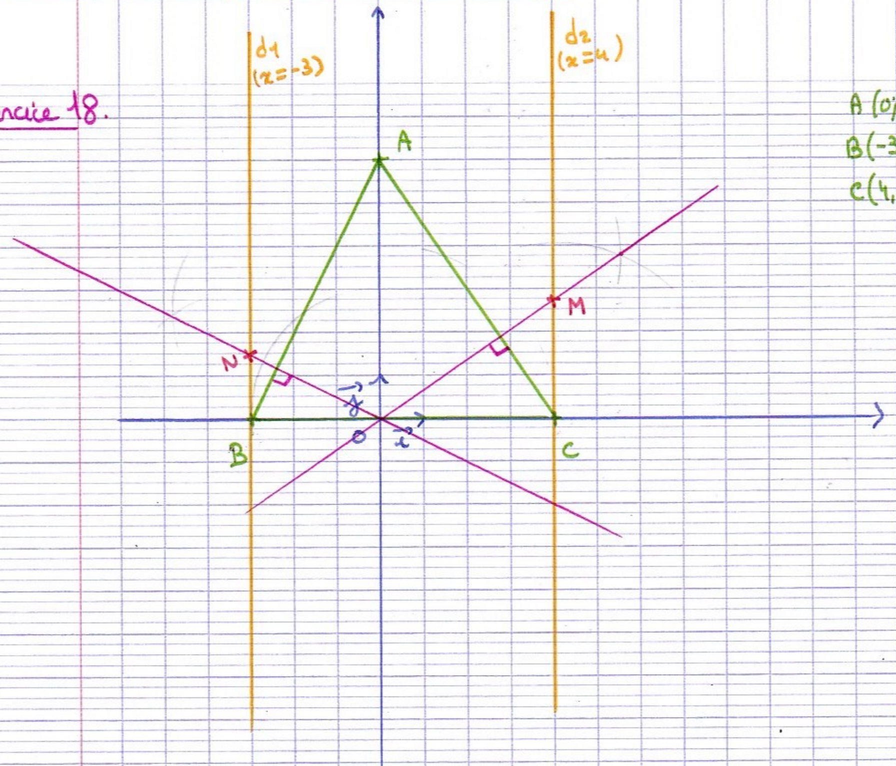


Comme ABC est un triangle, $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$

On a donc :
- soit $C = H$
- soit $(HC) \perp (AB)$

Dans les 2 cas, H est bien sur la hauteur issue de C du triangle ABC. H est donc le point de concours des 3 hauteurs, celles-ci sont bien concourantes.

Exercice 18.



A (0;6)
B(-3;0)
C(4,0)

1) N a pour abscisse -3 car il appartient à la droite d'équation $x=-3$.
On sait, de plus, que $(NO) \perp (AB)$, donc que $\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\overrightarrow{NO}\begin{pmatrix} x_O - x_N \\ y_O - y_N \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{NO}\begin{pmatrix} 0-(-3) \\ 0-y_N \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{NO}\begin{pmatrix} 3 \\ -y_N \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3-0 \\ 0-6 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{AB} = 3\times(-3) + (-y_N)\times(-6)$$
$$= -9 + 6y_N$$

$\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow -9 + 6y_N = 0 \Leftrightarrow 6y_N = 9$

soit $y_N = \frac{9}{6} = \frac{\cancel{3}\times 3}{\cancel{3}\times 2} = \frac{3}{2}$ $\quad \boxed{N\left(-3;\frac{3}{2}\right)}$

M a pour abscisse 4 car il est sur la droite d'équation $x=4$.
On sait aussi que $(OM) \perp (AC)$ donc que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x_M - x_O \\ y_M - y_O \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} 4-0 \\ y_M - 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} 4 \\ y_M \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4-0 \\ 0-6 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 4\times 4 + y_M\times(-6) = 0$$
$$\Leftrightarrow 16 - 6y_M = 0$$
$$\Leftrightarrow 16 = 6y_M$$
$$\Leftrightarrow \frac{16}{6} = y_M$$

$y_M = \frac{16}{6} = \frac{\cancel{2}\times 8}{\cancel{2}\times 3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}66$ $\quad \boxed{M\left(4;\frac{8}{3}\right)}$

2) a) $N\left(-3;\frac{3}{2}\right)$ et $M\left(4;\frac{8}{3}\right)$

Un point $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartiendra à la droite (MN) si et seulement si $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -3-4 \\ \frac{3\times 3}{2\times 3} - \frac{8\times 2}{3\times 2} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -7 \\ -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} x_N - x_P \\ y_N - y_P \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} -3-x \\ \frac{3}{2} - y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{MN}$ colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{PN};\overrightarrow{MN}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3-x & -7 \\ \frac{3}{2}-y & -\frac{7}{6} \end{vmatrix} = 0$$

Suite de l'exercice 18 question 2.a)

$\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{MN}$ colinéaires $\iff (-3-x)\left(-\frac{7}{6}\right)-\left(\frac{3}{2}-y\right)\times(-7)=0$

$\iff (3+x)\times\frac{7}{6} + 7\left(\frac{3}{2}-y\right)=0$

$\iff \frac{21}{6}+\frac{7x}{6}+\frac{21\times 3}{2\times 3}-7y=0$

$\iff \frac{7x}{6}-\frac{42}{6}y+\frac{84}{6}=0$

$\times 6$

$\iff 7x-42y+84=0$

$:7$

$\iff \boxed{x-6y+12=0}$

Voici une équation de la droite (MN)

b) H est le point de la droite (MN) qui a pour abscisse 0 puisqu'il est sur l'axe des ordonnées.

$H\in(MN)$ donc $x_H-6y_H+12=0$, avec $x_H=0$

donc $-6y_H+12=0 \iff -6y_H=-12 \iff y_H=2$

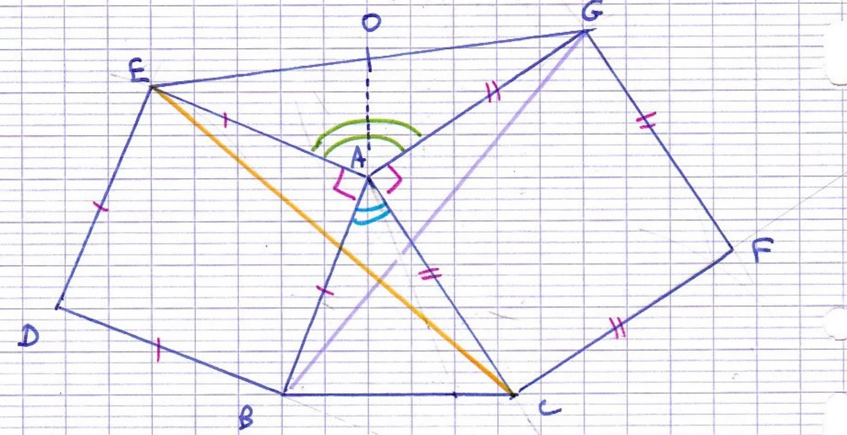
donc $\boxed{H(0;2)}$

3) $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}x_H-x_B\\y_H-y_B\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}0-(-3)\\2-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=3\times4+2\times(-6)=12-12=0$

(BH) et (AC) sont donc perpendiculaires. Et comme H est à la fois sur la hauteur issue de B du triangle ABC et sur sa hauteur issue de A (il s'agit de (AH) et on a bien (AH) ⊥ (BC) puisque (AH) est l'axe des ordonnées et (BC) celui des abscisses), H est l'orthocentre du triangle ABC

Exercice 19 :

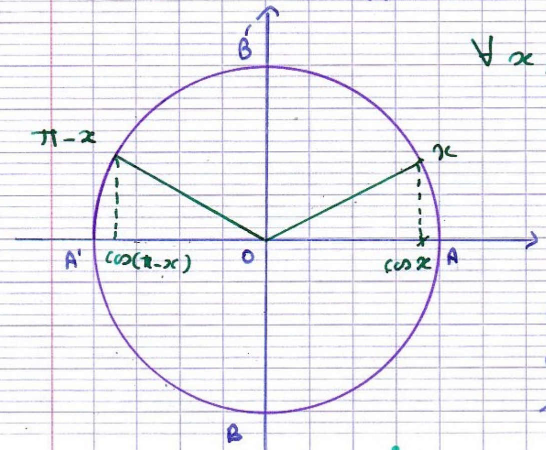


1) a) $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}=AE\times AG\times\cos\widehat{EAG}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

Remarquons que : $\widehat{EAG}+\underbrace{\widehat{GAC}}_{90°}+\widehat{CAB}+\underbrace{\widehat{BAE}}_{90°}=360°$

Donc $\widehat{EAG}+\widehat{CAB}=180°$

$\widehat{EAG}$ et $\widehat{CAB}$ sont des angles supplémentaires. Leurs cosinus sont donc opposés :



$\forall x,\ \cos(\pi-x)=-\cos x$

On a donc :

$\cos\widehat{EAG}=-\cos\widehat{BAC}$

Mais aussi :

$AE=AB$ et $AG=AC$

car ABDE et ACFG sont des carrés.

Suite de l'exercice 19 question 1. On trouve donc :

$$\vec{AE}.\vec{AG} = AE \times AG \times \cos \widehat{EAG}$$
$$= AB \times AC \times (-\cos \widehat{BAC})$$
$$= -AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\boxed{\vec{AE}.\vec{AG} = -\vec{AB}.\vec{AC}}$$ C.Q.F.D

b) $$\vec{EC}.\vec{BG} = (\vec{AC}-\vec{AE}).(\vec{AG}-\vec{AB})$$
$$= \underbrace{\vec{AC}.\vec{AG}}_{0} \underbrace{-\vec{AC}.\vec{AB}}_{\vec{AE}.\vec{AG} \text{ d'après a)}} - \vec{AE}.\vec{AG} + \underbrace{\vec{AE}.\vec{AB}}_{0}$$
$$= \vec{AE}.\vec{AG} - \vec{AE}.\vec{AG}$$

$\vec{EC}.\vec{BG} = 0 \iff \underbrace{\vec{EC}=\vec{0} \text{ ou } \vec{BG}=\vec{0}}$ ou $(EC)\perp(BG)$

pas le cas d'après la figure

(EC) et (BG) sont donc perpendiculaires.

On peut montrer : $\vec{AC}-\vec{AE} = \vec{AC}+\vec{EA} = \vec{EA}+\vec{AC} = \vec{EC}$

$\vec{AG}-\vec{AB} = \vec{AG}+\vec{BA} = \vec{BA}+\vec{AG} = \vec{BG}$

2) a) $\vec{AE}.\vec{AC} = AE \times AC \times \cos \widehat{EAC}$

et $\vec{AB}.\vec{AG} = AB \times AG \times \cos \widehat{BAG}$

Or : $AB = AE$ car ABDE est un carré.

$AG = AC$ car ACFG est un carré.

et $\widehat{EAC} = \widehat{BAG}$ car $\widehat{EAC} = \widehat{EAB} + \widehat{BAC} = 90° + \widehat{BAC}$

et $\widehat{BAG} = \widehat{BAC} + \widehat{CAG} = \widehat{BAC} + 90°$

On a donc bien : $$\boxed{\vec{AE}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AG}}$$

b) Pour moi, il est évident que EC = BG puisque [BG] est l'image du segment [EC] par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Mais ... les isométries ne sont plus au programme. Voyons un peu ce que cet exercice veut nous faire faire ...

On sait que : $\vec{EC} = \vec{AC} - \vec{AE}$ donc $\vec{AC}.\vec{AE} = \frac{1}{2}(AC^2+AE^2-EC^2)$

$\vec{BG} = \vec{AG} - \vec{AB}$ donc $\vec{AG}.\vec{AB} = \frac{1}{2}(AG^2+AB^2-BG^2)$

On vient de prouver que $\vec{AC}.\vec{AE} = \vec{AG}.\vec{AB}$

(pareil que $\vec{AE}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AG}$)

On a aussi $AC = AG$ car ACFG est un carré

et $AB = AE$ car ABDE est un carré

On en déduit que : $\frac{1}{2}(AC^2+AE^2-EC^2) = \frac{1}{2}(AG^2+AB^2-BG^2)$

×2 ×2

soit $AC^2+AE^2-EC^2 = AC^2+AE^2-BG^2$

soit $-EC^2 = -BG^2$

soit $EC^2 = BG^2$

soit $\boxed{EC = BG}$ C.Q.F.D

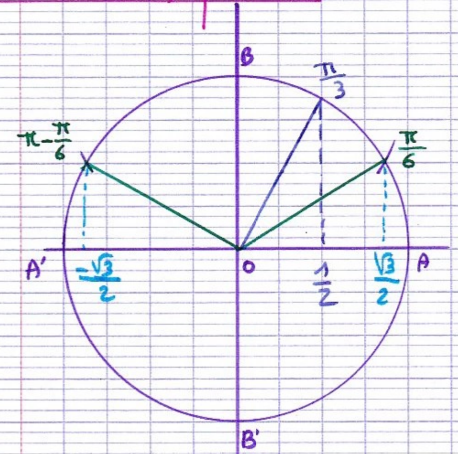
car $EC \geqslant 0$ et $BG \geqslant 0$

Exercice 20. 1) $\vec{BC}.\vec{BE} = BC \times BE \times \cos \widehat{CBE}$

$\widehat{CBE} = \widehat{CBA} + \widehat{ABE} = 90° + 60° = 150° (= 180° - 30°)$ $\pi - \frac{\pi}{6}$ en rad.

angle d'un carré ; angle d'un triangle équilatéral

Suite de l'exercice 20, question 1.



$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE} = BC \times BE \times \cos 150°$
$= 2 \times \cancel{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$

$\boxed{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE} = -2\sqrt{3}}$

$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = EA \times EB \times \cos \widehat{EAB}$
$= 2 \times 2 \times \cos 60°$
$= \cancel{2} \times 2 \times \frac{1}{\cancel{2}}$

$\boxed{\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = 2}$

2) On sait déjà que $BC = BG = 2$ car $ABCD$ est un carré tel que $AB = 2$ et $EBGF$ est un carré tel que $EB = 2$.

Pour prouver que BCG est équilatéral, il reste à prouver, par exemple, que $\widehat{GBC} = 60°$.

On sait que : $\widehat{GBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABG}$ avec $\widehat{ABC} = 90°$ car $ABCD$ est un carré.

On sait d'autre part que $\widehat{ABG} = \widehat{EBG} - \widehat{EBA}$
$= 90° - 60° = 30°$

car EBGF est un carré — car ABE est un triangle équilatéral.

Donc $\widehat{GBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABG} = 90° - 30° = 60°$

Le triangle BCG est tel que $BG = BC$ et $\widehat{GBC} = 60°$: c'est donc un triangle équilatéral.

3) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BG} = BC \times BG \times \cos \widehat{CBG}$
$= 2 \times 2 \times \cos 60°$
$= 2 \times 2 \times \frac{1}{2}$

$\boxed{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BG} = 2}$

Comme $ABCD$ est un carré donc un parallélogramme : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

Et comme $EBGF$ est un carré : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BG}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{EF}} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BG} = \boxed{-2}$

4) $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EF} = -EA \times EF \times \cos \widehat{AEF}$

$\widehat{AEF} = \widehat{BEF} - \widehat{BEA} = 90° - 60° = 30°$

donc $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF} = -2 \times 2 \times \cos 30° = -2 \times \cancel{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$\boxed{\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF} = -2\sqrt{3}}$

5) $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}).(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF})$ d'après la relation de Chasles

$= \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF}$
$= \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BE} + (-2) + \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} + (-2\sqrt{3})$
$= -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE} + (-2) + 2 + (-2\sqrt{3})$
$= \cancel{-(-2\sqrt{3})} + \cancel{(-2)} + \cancel{2} - \cancel{2\sqrt{3}}$

$\boxed{\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BF} = 0}$ (d'après les résultats des questions précédentes)

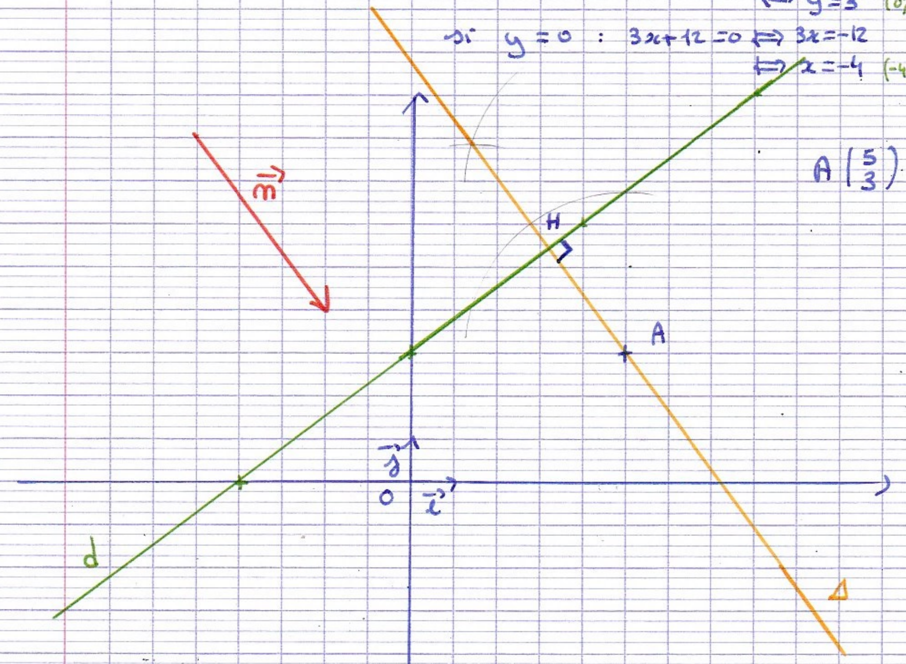
Suite de l'exercice 20 - 6) On vient de prouver que $\vec{DE}.\vec{BF}=0$
Comme $\vec{DE} \neq \vec{0}$ et $\vec{BF} \neq \vec{0}$, on en déduit que les droites (DE) et (BF) sont perpendiculaires, donc que (DE) est la perpendiculaire à (BF) qui passe par E.

On, la perpendiculaire à (BF) qui passe par E, c'est aussi la droite (EG), autre diagonale du carré EBGF. (EG) et (DE) sont donc la même droite - Les points D, G, E sont donc alignés.

Exercice 21 : d : $3x-4y+12$

si $x=0$: $-4y+12=0 \iff -4y=-12$
$\iff y=3$ $(0;3)$

si $y=0$: $3x+12=0 \iff 3x=-12$
$\iff x=-4$ $(-4;0)$



1) a) d a pour équation cartésienne $\underset{\substack{\uparrow \\ a}}{3}x \underset{\substack{\uparrow \\ b}}{-4}y + 12 = 0$

Donc $\vec{n}\,(3;-4)$ est l'un de ses vecteurs normaux.

1) b) Δ est perpendiculaire à d. $\Delta = (AH)$.
Le vecteur $\vec{AH}$ est donc un autre vecteur normal à d. $\vec{AH}$ et $\vec{n}$ ont même direction (car $H \neq A$: on peut vérifier que $A\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ n'est pas sur d car $3\times5-4\times3+12=15\neq0$).

$\vec{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et non nuls. Il existe donc un réel $k \neq 0$ tel que $\vec{AH}=k\vec{n}$.

c) $\vec{AH}\begin{pmatrix}x_H-x_A\\y_H-y_A\end{pmatrix}$ $\vec{AH}\begin{pmatrix}x_H-5\\y_H-3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ donc $k\vec{n}\begin{pmatrix}3k\\-4k\end{pmatrix}$

$\vec{AH}=k\vec{n}$ se traduit par $\begin{cases} x_H-5=3k \\ \text{et} \\ y_H-3=-4k \end{cases}$

d'où : $\begin{cases} x_H=3k+5 \\ y_H=-4k+3 \end{cases}$ $\boxed{H\begin{pmatrix}3k+5\\-4k+3\end{pmatrix}}$

2) $H\begin{pmatrix}3k+5\\-4k+3\end{pmatrix} \in d$ d'équation $3x-4y+12=0$

On a donc :
$3(3k+5)-4(-4k+3)+12=0$

soit $9k+15+16k-\cancel{12}+\cancel{12}=0$

soit $25k+15=0 \iff 25k=-15 \iff k=-\frac{15}{25}$

$-\frac{15}{25}=\frac{-3\times5}{5\times5}=-\frac{3}{5}=-0{,}6$ $\boxed{k=-\frac{3}{5}=-0{,}6}$

Suite et fin de l'exercice 21.

2. b) On sait que : $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{m}$ avec $k = -\frac{3}{5}$

$\overrightarrow{m}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \times 3 \\ -\frac{3}{5} \times (-4) \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$

$$AH = \sqrt{\left(-\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{81}{25} + \frac{144}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{225}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{9 \times \cancel{25}}{\cancel{25}}}$$

$$= \sqrt{9}$$

$\boxed{AH = 3}$ C.Q.F.D