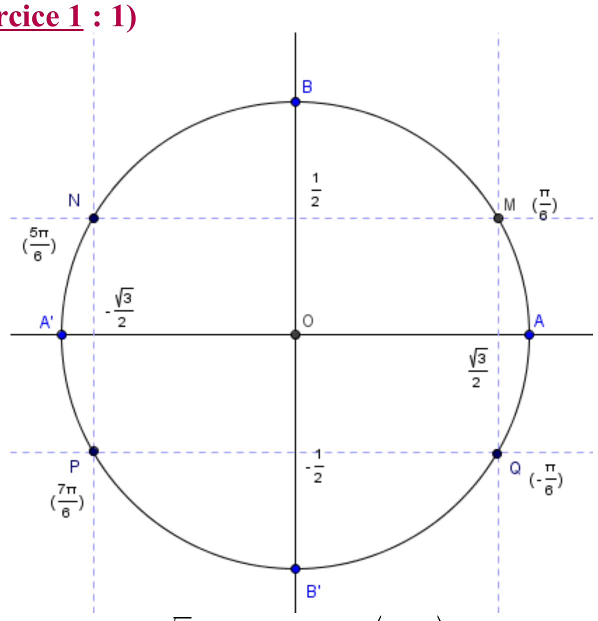
Exercice 1 : 1)



2) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

Exercice 2 : 1) $\frac{5\pi}{2}=\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi$

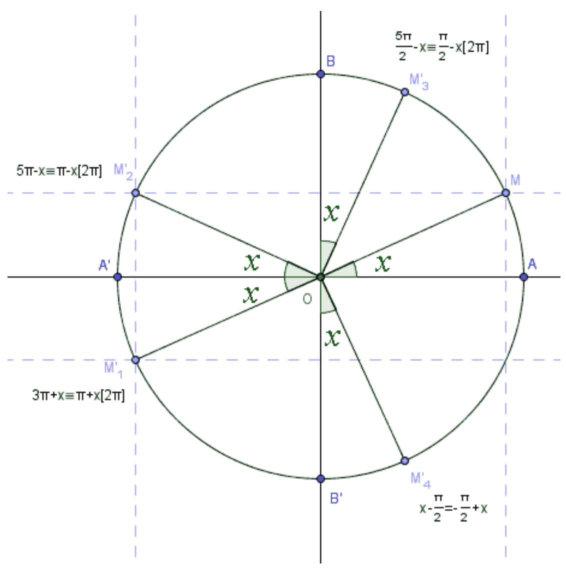
Donc $\boxed{\frac{5\pi}{2}\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]}$ (« $\frac{5\pi}{2}$ est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π » : ces deux angles ont donc même sinus et même cosinus)

$3\pi+x=2\pi+\pi+x=\pi+x+2\pi$

donc $\boxed{3\pi+x\equiv\pi+x\ [2\pi]}$

$5\pi-x=4\pi+\pi-x=\pi-x+4\pi$

donc $\boxed{5\pi-x\equiv\pi-x\ \ [2\pi]}$



2) $A(x)=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\sin(3\pi+x)+\cos(5\pi-x)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$A(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi+x)+\cos(\pi-x)+\cos\left(\frac{-\pi}{2}+x\right)$.

Par symétrie par rapport à la première bissectrice,
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$.

Par symétrie par rapport au centre du repère : $\sin(\pi+x)=-\sin x$

Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées,
$\cos(\pi-x)=-\cos x$.

Par symétrie par rapport à la seconde bissectrice,
$\cos\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin x$.

Donc $A(x)=\cos x-\sin x-\cos x+\sin x=0$.

Exercice 3 :

$A(x)=\sin(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)+\sin(x)$

Par symétrie par rapport à l'origine du repère,
$\boxed{\sin(\pi+x)=-\sin x}$.

Par symétrie par rapport à la première bissectrice,
$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x}$.

Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées,
$\boxed{\cos(\pi-x)=-\cos x}$.

Donc $A(x)=-\sin x+\sin x-\cos x+\sin x=\boxed{\sin x-\cos x}$

$B(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+\pi)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin(x-\pi)$

$x-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+x$. Par symétrie par rapport à la deuxième bissectrice, $\boxed{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x}$.

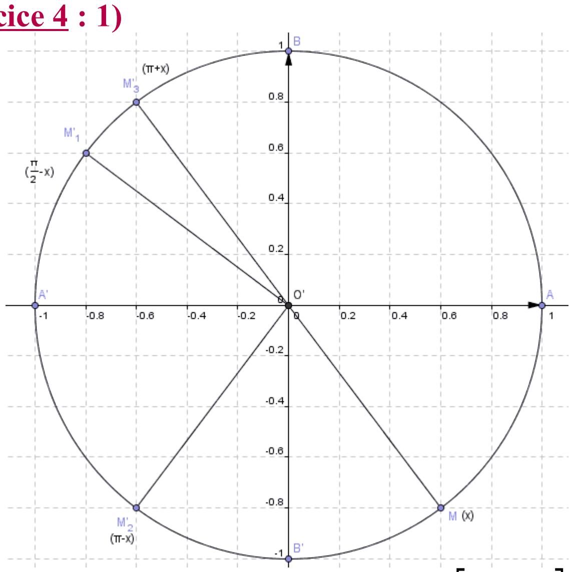
Par symétrie par rapport à l'origine du repère,
$\cos(x+\pi)=-\cos x$ donc $\boxed{-\cos(x+\pi)=\cos x}$.

Par symétrie par rapport à la deuxième bissectrice,
$\boxed{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x}$.

Par symétrie par rapport à l'origine du repère,
$\sin(x-\pi)=\sin(-\pi+x)=\sin(\pi+x)=-\sin x$.
Donc $\boxed{-\sin(x-\pi)=\sin x}$.

$B(x)=-\cos x+\cos x+\sin x+\sin x=\boxed{2\sin x}$

Exercice 4 : 1)



2) a) On sait que $\cos x = \frac{3}{5}$ et que x ∈ $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, donc $\sin x < 0$.

On utilise la relation $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$, qui est vraie pour tout réel x, donc en particulier pour notre x de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ dont le cosinus vaut $\frac{3}{5}$.

$\sin^2 x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$ soit $\sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$.

soit $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

Donc $\sin x = \sqrt{\frac{16}{25}}$ ou $-\sqrt{\frac{16}{25}}$.

Comme $\sin x < 0$, on a $\sin x = -\sqrt{\frac{16}{25}} = \boxed{-\frac{4}{5}}$.

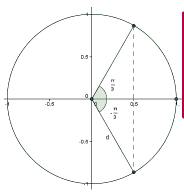
b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \frac{3}{5}$ (symétrie par rapport à la première bissectrice)

c) $\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{3}{5}$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées)

d) $\sin(\pi + x) = -\sin x = \frac{4}{5}$ (symétrie par rapport au centre du repère)

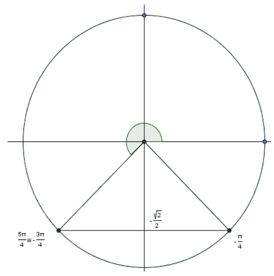
Exercice 5 : Résoudre dans ℝ les équations suivantes.

a) $\boxed{\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ Dans l'intervalle]-π;π], cette équation a deux solutions : $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.



Pour résoudre cette équation dans ℝ, il suffit de citer tous les angles congrus à ces deux mesures modulo 2π : $\boxed{S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \;;\; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z} \right\}}$

b) $\boxed{\sin x = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

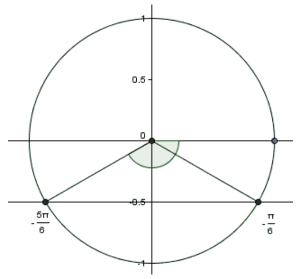


La mesure principale de l'angle $\frac{5\pi}{4}$ est $-\frac{3\pi}{4}$.

Dans]-π;π], un autre angle a le même sinus : $-\frac{\pi}{4}$.

$\boxed{S = \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi;\ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$

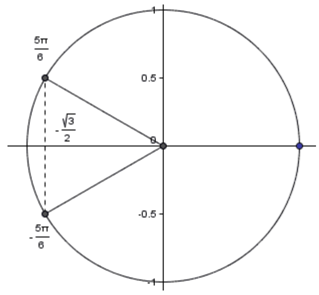
c) $\sin x = \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$



Dans]-π;π], un autre angle a le même sinus : $-\frac{\pi}{6}$.

$\boxed{S = \left\{ -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$

d) $\cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$



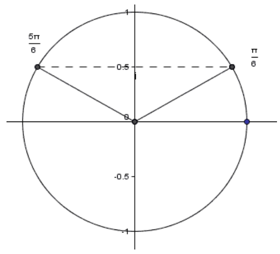
Dans l'intervalle]-π;π], cette équation a deux solutions : $\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$.

$\boxed{S = \left\{ -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$

Exercice 6 : Trouver les nombres de l'intervalle [0;2π[tels que : **a)** $\boxed{\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

$\boxed{S = \left\{ \frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3} \right\}}$: voir la figure du a) de l'exercice 5 en remarquant que $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = -\frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

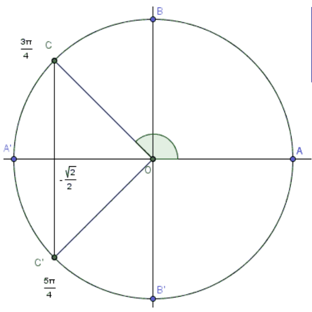
b) $\sin\ x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$



$\boxed{S = \left\{ \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6} \right\}}$

c) $\cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$\boxed{S = \{ \frac{3\pi}{4} \; ; \; \frac{5\pi}{4} \}}$



Exercice 7 : Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$:

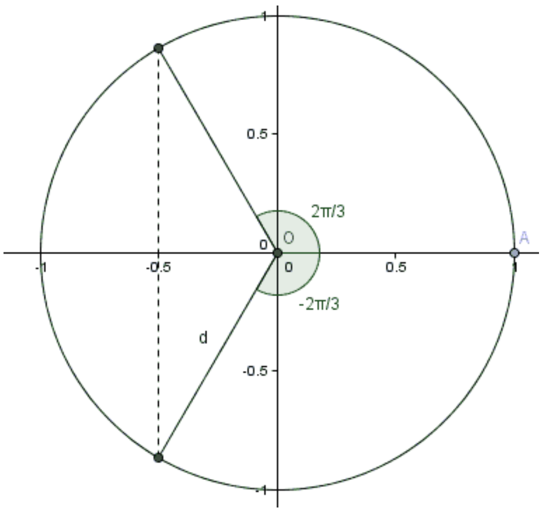
a) $\sin x = \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ $\qquad S = \{ -\frac{3\pi}{4} \; ; -\frac{\pi}{4} \}$

b) $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad S = \{ -\frac{\pi}{6} \; ; \frac{\pi}{6} \}$

c) $\sin x = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ $\qquad S = \{ -\frac{2\pi}{3} \; ; -\frac{\pi}{3} \}$

d) $\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $\qquad S = \{ -\frac{2\pi}{3} \; ; \frac{2\pi}{3} \}$

Exercice 8 : 1) Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$



$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Dans $[0 ; 2\pi[$, l'équation $\boxed{\cos(x) = -\frac{1}{2}}$ admet deux solutions : $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

$\boxed{S = \{ \frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} \}}$

2) Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'équation $\boxed{\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Dans $[0;\pi]$, cette équation a deux solutions : $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{2\pi}{3}$. $\boxed{S = \{ \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \}}$