1ère – 28 Exercices sur les calculs de dérivées et leurs applications.

Exercice 1 : La fonction *f* est définie sur ℝ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$. Calculer $f'(x)$

Exercice 2 : $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=3x^4+4x^3+5x+1$. Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 ?

Exercice 3 : Quel est le sens de variations de la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=x^3+3x-10$?

Exercice 4 : La fonction *g* définie par $g(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ est-elle décroissante sur $[-1;1]$?

Exercice 5 : La fonction *u* est définie sur ℝ par $u(x)=x^3+x$.
Lorsque *x* appartient à l'intervalle $[-2;0]$, à quel intervalle appartient $u(x)$?

Exercice 6 : La fonction k est définie sur ℝ par $k(x)=-x^2+2x$. Si *x* appartient à l'intervalle [0;3], à quel intervalle appartient $k(x)$?

Exercice 7 : Dans chacune des situations suivantes, indiquer l'ensemble de définition de la fonction *f*, le ou les intervalles sur lesquels *f* est dérivable, puis calculer $f'(x)$.

1) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+3x^3-2x^2+4x+1$ 2) $f(x)=(3x-1)(x+1)^2$ 3) $f(x)=(\sqrt{x}+1)^2$

4) $f(x)=\frac{3}{4x}-\frac{2x}{5}$ 5) $\frac{1}{(1-2x)^2}$ 6) $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{4-x}$ 7) $f(x)=2x-1+\frac{1}{3-x}$

Exercice 8 : *f* et *g* sont deux fonctions définies sur ℝ-{2} par $f(x)=\frac{4x+1}{x-2}$ et $g(x)=\frac{9}{x-2}$.

1) Prouver que *f* et *g* sont dérivables sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;+\infty[$.
2) Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$. Que remarquez-vous ?
3) Calculez $f(x)-g(x)$. Justifiez alors la remarque de la question 2)

Exercice 9 : Dans chacun des 3 cas suivants, déterminez l'ensemble de définition de la fonction *f* et une équation de la tangente à la courbe représentative de *f* en son point d'abscisse *a*.

1) $f(x)=\frac{x+3}{1-2x}$ et $a=-1$ 2) $f(x)=x^2+1-\frac{1}{x^2+1}$ et $a=4$ 3) $f(x)=(4x+8)\sqrt{x}$ et $a=4$

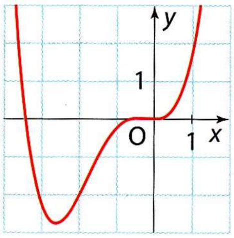
Exercice 10 : La fonction *f* est définie sur ℝ par $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$

1) Pourquoi *f* est-elle dérivable sur ℝ ? 2) Calculer $f'(x)$ et établir le tableau de variations de *f* sur ℝ. 3) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de *f* en *a*, où *a* est un réel quelconque.

Exercice 11 : La fonction *g* est définie sur ℝ par $g(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-8$. 1) Calculer $g'(x)$

2) Démontrer que la courbe représentative de *g* admet 2 tangentes horizontales. Précisez les coordonnées des points correspondants.

Exercice 12 : La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^4-8x^2+6$. Démontrez que la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse -1 passe par le point $A(0;8)$.



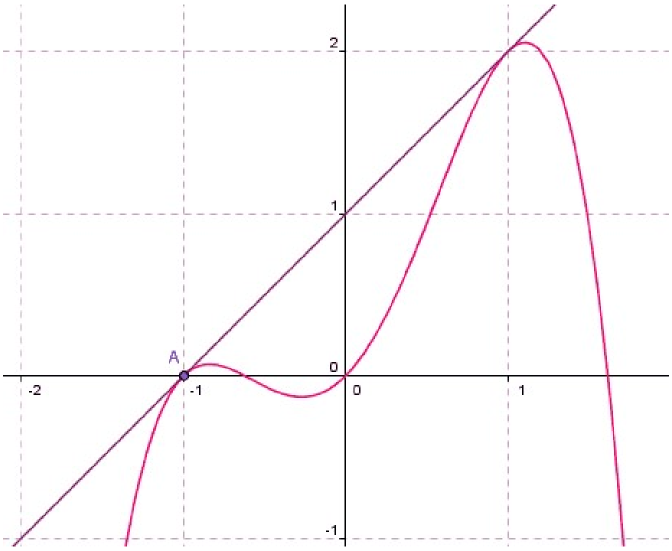
Exercice 13 : Ci-contre est représentée une partie de la courbe représentative de la fonction $f: x \longmapsto \frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2$ 1) En combien de points la courbe semble-t-elle avoir une tangente parallèle à l'axe des abscisses ? 2) Par le calcul, trouver les valeurs exactes des abscisses de ces points.

Exercice 14 : *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

1) Démontrer que *f* est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$. 2) Quels sont les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite d'équation $y=4x$? 3) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}$ passant par le point A(0;1) ?

Exercice 15 : *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+2x^2+3x+1$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative. 1) La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?
2) La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation $y=3x-5$? Si oui, précisez en quels points (donner leur abscisse et leur ordonnée)

Exercice 16 : Avec Geogebra, on a obtenu ci-contre la courbe représentative de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^4+2x^2+x$ et la tangente T à cette courbe au point $A(-1;0)$.



Cette droite T semble être aussi la tangente à la courbe en un second point. Démontrez-le.

Exercice 17 : *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+3x+4$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative. 1) Déterminer les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur 3.
2) On a tracé ci-contre une partie de la courbe $\mathscr{C}$. Il semble que par le point $A(0;4)$, on puisse mener à $\mathscr{C}$ deux tangentes, $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$. Démontrez-le.

Exercice 18 : On considère la fonction polynôme *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2-3x+2$.
1) Donner l'expression de $f'(x)$.
2) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de *f* au point d'abscisse 0. Vérifier à l'aide de votre calculatrice.

3) Faites de même avec la fonction polynôme

$g : x \longmapsto x^4 - \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - x + 4$. Que remarquez-vous concernant l'équation réduite de la tangente au point $(0 ; g(0))$? Éventuellement, recommencer avec une ou plusieurs fonctions polynômes de votre choix.

4) a, b, c et d sont 4 nombres réels tels que $a \neq 0$. P est la fonction polynôme définie sur ℝ par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calculer $P(0)$ et $P'(0)$, puis déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_P$ représentative de P en son point d'abscisse 0. Énoncez la propriété établie.

5) La propriété établie est-elle vérifiée par la fonction $h : x \longmapsto \sqrt{x+1} + 2x + 1$?

Exercice 19 : f est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^3 + x^2 - x$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Le but de l'exercice est d'étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente T en son point d'abscisse 1. 1) Donner l'équation réduite de T.

2) On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x) - (4x - 3)$

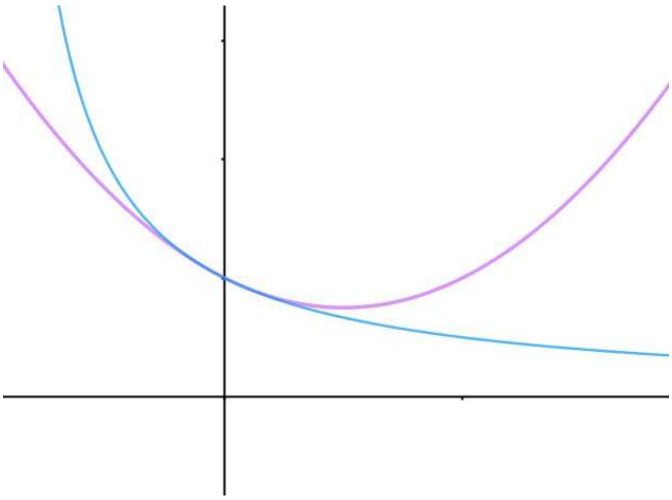
a) Étudiez les variations de g et dressez son tableau de variations.

b) Calculez $g(-3)$. Placez -3 et $g(-3)$ dans le tableau de variations.

c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x et conclure.

Exercice 20 : Voici ci-contre affichées (en partie) les représentations graphiques des fonctions :

$f : x \longmapsto x^2 - x + 1$ et $g : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$



1) Distinguez l'arc de la parabole représentative de f de l'arc de l'hyperbole représentative de g.

2) a) Quelle conjecture pouvez-vous faire en ce qui concerne d'éventuels points communs à ces 2 courbes ? b) Démontrez-la par le calcul.

3) a) Quelle conjecture pouvez-vous faire en ce qui concerne les tangentes à chacune des courbes en un point commun ? b) Démontrez-la par le calcul.

Exercice 21 : Dans chacun des cas suivants : déterminez l'ensemble de définition Df de la fonction f, et les intervalles sur lesquels celle-ci est dérivable. Étudiez le signe de la dérivée et les variations de f sur son ensemble de définition.

1) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$

2) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{5}{6}x - 5$

3) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + \dfrac{x^2}{2} + 3$

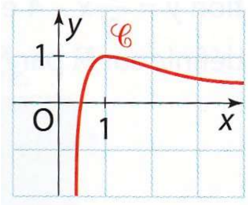
4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x^2}$

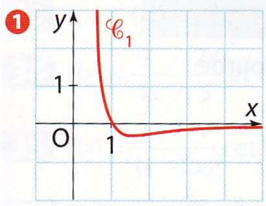
5) $1 - x - \dfrac{1}{x-1}$

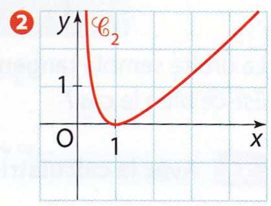
6) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x + 6}$

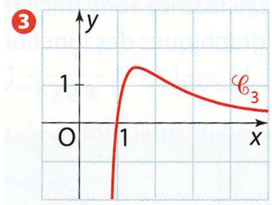
7) $f(x) = (3 - x)\sqrt{x}$

Exercice 22 : La figure ci-dessous à gauche est la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. Parmi les 3 courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$, quelle est celle qui est susceptible de représenter la fonction dérivée f' de f ?

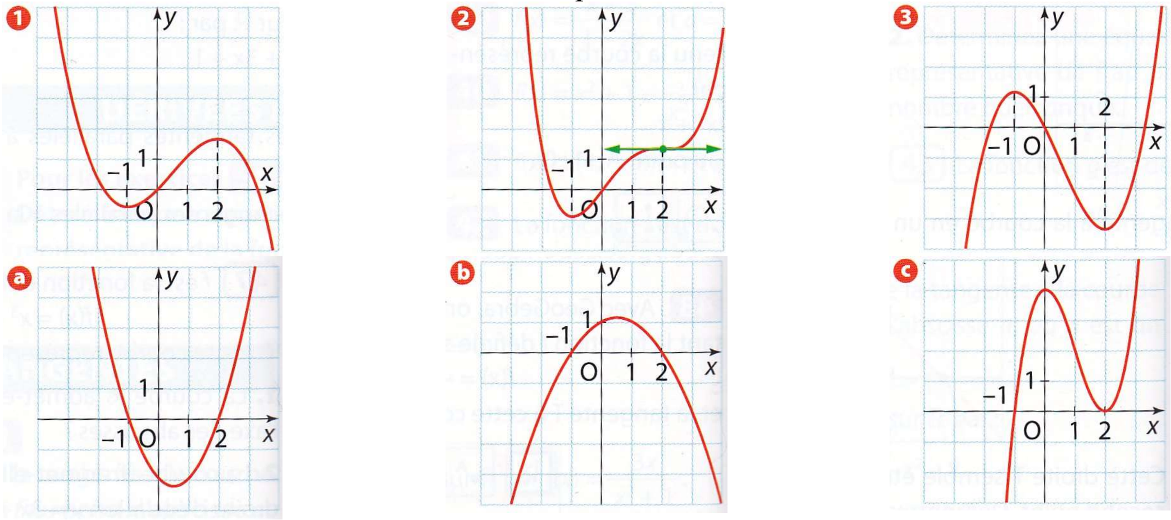








Exercice 23 : Les courbes 1, 2 et 3 représentent des fonctions et les courbes a, b et c leurs dérivées, mais dans le désordre. Associez à la courbe de chaque fonction celle de sa dérivée.



Exercice 24 : On donne le tableau suivant concernant une fonction *f*.

x	$-\infty$		-2		-1		0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↗	1	↘	‖	↘	-1	↗	2	↘	

1) Quel est l'ensemble de définition de *f* ? Sur quels intervalles est-elle dérivable ?
2) *f* possède-t-elle des extremums locaux ? 3) Esquissez une courbe possible pour *f*.

Exercice 25 : *f* est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+2$.

1) Dresser le tableau de variations de *f* sur ℝ.
2) Déterminer un encadrement de $f(x)$ sur les intervalles $[0;1]$, $[0;3]$, $[-3;0]$ et $[-3;3]$,

Exercice 26 : Les phrases suivantes permettent-elles d'affirmer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I ? Justifiez votre réponse. Si la réponse est négative, trouvez un contre-exemple.
1) Il existe un nombre *x* appartenant à I tel que $f'(x)>0$.
2) Pour tout nombre *x* de I, $f'(x)>0$. 3) Pour tout nombre *x* de I, $f'(x)\geqslant 0$.

Exercice 27 : La fonction *f* est définie sur ℝ par $f(x)=x^4-2x^3+2x^2-2x+5$. On note f' la dérivée de *f* et f'' (« *f* seconde ») la dérivée de f' . 1) Calculez $f''(x)$ et étudiez son signe.
2) Déduisez-en les variations de f' . 3) Calculez $f'(1)$, puis déduisez des questions précédentes le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de *x*. 4) Étudiez enfin les variations de *f*.

Exercice 28 : *f* est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x^4-8x^2+2$.
1) Étudiez les variations de *f* et dressez son tableau de variations.
2) Précisez les extremums locaux de *f*. 3) Dans chaque cas, donnez un encadrement de $f(x)$:
a) $x\in[-2;1]$ b) $0\leqslant x\leqslant 3$ c) $x\in[-2;2]$