

1ère S – 6 exercices sur : Loi binomiale – Espérance – Échantillonnage

Exercice 1 : Paul affirme : « Avec un dé régulier, on a autant de chance d’obtenir au moins un six en 4 lancers que d’obtenir au moins deux six avec 8 lancers ».

Sara objecte : « Pas du tout. Dans le premier cas, la probabilité est supérieure à 0,5, dans le deuxième cas, elle est inférieure à 0,5. ».

Qui a raison ?

Exercice 2 : Un QCM comporte 20 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est juste. Chaque réponse juste rapporte un point et il n’y a pas de pénalité pour une réponse fautive. Un candidat répond au hasard à chaque question.

1) Quel nombre total de points peut-il espérer ?

2) Quelle pénalité doit-on attribuer à une réponse fautive pour que le total espéré, en répondant entièrement au hasard, soit égal à 2 sur 20 ?

Exercice 3 : Une entreprise fabrique chaque jour 10 000 composants électroniques. Chaque composant présente un défaut avec la probabilité 0,002. Si le composant est repéré comme étant défectueux, il est détruit par l’entreprise, et chaque composant détruit fait perdre 1 € à l’entreprise.

1) Les composants sont contrôlés un à un, et chaque contrôle coûte 0,1 €. Quel est le coût moyen journalier pour l’entreprise (contrôles et destruction des composants défectueux) ?

2) Les composants sont regroupés par lots de 10, et on effectue un unique contrôle automatique de chaque lot, qui coûte lui aussi 0,1 €. À l’issue de ce contrôle, le lot est accepté si tous les composants sont sains, et globalement détruit si l’un au moins des 10 composants présente un défaut. Quel est le coût moyen journalier pour l’entreprise de ce nouveau dispositif (contrôles et destruction des composants défectueux) ?

Exercice 4 : Monsieur Z, chef du gouvernement d’un pays lointain, affirme que 52 % des électeurs lui font confiance. On interroge 100 électeurs au hasard (la population est suffisamment grande pour considérer qu’il s’agit de tirages avec remise) et on souhaite savoir à partir de quelles fréquences, au seuil de 95 %, on peut mettre en doute le pourcentage annoncé par Monsieur Z, dans un sens, ou dans l’autre.

1. On fait l’hypothèse que Monsieur Z dit vrai et que la proportion des électeurs qui lui font confiance dans la population est 0,52. Montrer que la variable aléatoire X , correspondant au nombre d’électeurs lui faisant confiance dans un échantillon de 100 électeurs, suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.

2. On donne ci-contre un extrait de la table des probabilités cumulées $P(X \leq k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.

a. Déterminer a et b tels que :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

b. Comparer l’intervalle de fluctuation au seuil de 95 %,

$\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$ ainsi obtenu grâce à la loi binomiale, avec l’intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

3. Énoncer la règle de décision permettant de rejeter ou non l’hypothèse que la proportion des électeurs qui font confiance à Monsieur Z dans la population est 0,52, selon la valeur de la fréquence f des électeurs favorables à Monsieur Z obtenue sur l’échantillon.

k	$P(X \leq k) \approx$
40	0,0106
41	0,0177
42	0,0286
43	0,0444
...	...
61	0,9719
62	0,9827
63	0,9897
64	0,9941

4. Sur les 100 électeurs interrogés au hasard, 43 déclarent avoir confiance en Monsieur Z. Peut-on considérer, au seuil de 95 %, l'affirmation de Monsieur Z comme exacte ?

Exercice 5 : En Novembre 1976 dans un comté du sud du Texas, Rodrigo Partida est condamné à huit ans de prison. Il attaque ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté est, selon lui, discriminante à l'égard des Américains d'origine mexicaine. Alors que 80 % de la population du comté est d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés lors des années précédentes, il n'y a eu que 339 personnes d'origine mexicaine. Devant la Cour Suprême, un expert statisticien produit des arguments pour convaincre du bien fondé de la requête de l'accusé. En vous situant dans le rôle de cet expert, pouvez-vous décider si les Américains d'origine mexicaine sont sous-représentés dans les jurys de ce comté ?

Exercice 6 : Un groupe de citoyens demande à la municipalité d'une ville la modification d'un carrefour en affirmant que 40 % des automobilistes tournent en utilisant une mauvaise file. Un officier de police constate que sur 500 voitures prises au hasard, 190 prennent une mauvaise file.

1. Déterminer, en utilisant la loi binomiale sous l'hypothèse $p = 0,4$, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.
2. D'après l'échantillon, peut-on considérer, au seuil de 95 %, comme exacte l'affirmation du groupe de citoyens ?