1ère S – Corrigés des 6 exercices sur la loi binomiale, l'espérance et l'échantillonnage.

Exercice 1 : Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de 6 obtenus en 4 lancers avec un dé régulier, et Y la variable aléatoire qui donne le nombre de 6 obtenus en 8 lancers avec le même dé.

X suit une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=\frac{1}{6}$.

Y suit une loi binomiale de paramètres $n'=8$ et $p=\frac{1}{6}$.

On souhaite comparer $P(X\geqslant 1)$ et $P(Y\geqslant 2)$.

$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{671}{1296}$ Or $\frac{1}{2}=\frac{648}{1296}$. Donc $\boxed{P(X\geqslant 1)>0{,}5}$.

et $\boxed{P(X\geqslant 1)\approx 0{,}518}$

$$P(Y\geqslant 2)=1-(P(Y=0)+P(Y=1))=1-\left(\left(\frac{5}{6}\right)^8+8\times\left(\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{5}{6}\right)^7\right)=\frac{6^8-5^8-8\times 5^7}{6^8}=\frac{663991}{1679616}$$

Or $\frac{1}{2}=\frac{839808}{1679616}$, donc $\boxed{P(Y\geqslant 2)<0{,}5}$. Et on a $\boxed{P(Y\geqslant 2)\approx 0{,}395}$. C'est Sara qui a raison.

Exercice 2 :

1) Chaque fait de répondre au hasard à une question est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$. (Il y a deux issues : répondre correctement (« succès ») et répondre faux (« échec »), le succès ayant une probabilité de $\frac{1}{4}$.)

Répondre juste ou non à chaque question ne dépend pas de la réussite ou non des autres. Il y a 20 questions.

Répondre au hasard aux 20 questions constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n=20$ et $p=\frac{1}{4}$.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de réponses justes sur les 20 questions.

X suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\frac{1}{4}$.

$$\boxed{E(X)=n\times p=20\times\frac{1}{4}=5}.$$

Le candidat qui répond au hasard aux 20 questions peut espérer en moyenne une note de 5/20.

2) Soit a la pénalité que l'on va appliquer pour une réponse fausse, et Y la variable aléatoire qui va donner la note obtenue au test. On souhaite que E(Y)=2.

Comme X est le nombre de réponses correctes obtenues, $Y=1\times X-a\times(20-X)$

$Y=X-20a+aX$ $\quad\quad Y=(a+1)X-20a$

Donc $E(Y)=(a+1)E(X)-20a$ d'après la formule E(λX+μ)=λE(X)+μ, où λ et μ sont des réels constants.

Comme $E(X)=5$, on a $E(Y)=5(a+1)-20a$ soit $E(Y)=5a+5-20a$ soit $E(Y)=-15a+5$.

On souhaite que $E(Y)=2$. On calcule donc a de manière à ce que $-15a+5=2$.

$-15a+5=2 \Leftrightarrow 3=15a \Leftrightarrow \boxed{a=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}=0{,}2}$.

Pour qu'un candidat qui répond au hasard puisse espérer un score de 2/20 au lieu de 5/20, il faut appliquer une pénalité de 0,2 point à chaque réponse fausse.

Exercice 3 :

1) Le coût su contrôle des composants est de $0{,}1\times 10000=1000$ €.
Chaque composant a une probabilité de 0,002 d'être défectueux. Donc, en moyenne, $10000\times 0{,}002=200$ composants seront défectueux, ce qui coûtera à l'entreprise $200\times 1=200$ € pour les faire détruire.
Donc le coût moyen journalier de contrôle et de destruction des composants défectueux pour l'entreprise est de $\boxed{1000+200=1200}$ €.

2) Si les composants sont contrôlés par lots de 10, au même prix que précédemment pour contrôler un composant,le coût du contrôle sera 10 fois moindre : 100 €.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de composants défectueux sur un lot de 10.
X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}002$.
La probabilité pour qu'un composant au moins soit défectueux sur les 10 (donc pour que le lot soit détruit) est de : $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-(1-0{,}002)^{10}=1-0{,}998^{10}$ $\quad P(X\geqslant 1)\approx 0{,}01982$

Le coût moyen de destruction des lots sera donc de $10\times(1-0{,}998)^{10}$ (on suppose, puisque l'énoncé ne dit rien à ce sujet, que le coût de destruction de chaque composant est resté de 1 €, et que donc le coût de destruction de 10 composants est de 10 €.)

Le coût moyen de l'entreprise avec le nouveau dispositif s'élève donc à :
$\boxed{100+10\times(1-0{,}998^{10})\approx 100{,}20}$ €

Exercice 4 : 1) On choisit 100 électeurs au hasard, en assimilant ce choix à des tirages avec remise.
Chaque électeur a une probabilité de 0,52 de faire confiance à Monsieur Z, d'après l'hypothèse.
On est donc dans le cadre d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n=100$ et $p=0{,}52$.
X, variable aléatoire qui correspond au nombre d'électeurs parmi les 100 qui font confiance à Monsieur Z, suit donc une loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0{,}52$.

2) a) On lit dans le tableau : $\boxed{a=42}$ et $\boxed{b=62}$.

b) L'intervalle $\left[\frac{a}{100};\frac{b}{100}\right]$ obtenu est $[0{,}42;0{,}62]$.

$p-\frac{1}{\sqrt{n}}=0{,}52-\frac{1}{\sqrt{100}}=0{,}42$ $\qquad$ $p+\frac{1}{\sqrt{n}}=0{,}052+\frac{1}{\sqrt{100}}=0{,}62$

L'intervalle $\left[\frac{a}{100};\frac{b}{100}\right]$ est donc le même que l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Monsieur Z, chef du gouvernement d'un pays lointain, affirme que 52 % des électeurs lui font confiance.
On interroge 100 électeurs au hasard (la population est suffisamment grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise) et on souhaite savoir à partir de quelles fréquences, au seuil de 95 %, on peut mettre en doute le pourcentage annoncé par Monsieur Z, dans un sens, ou dans l'autre.

3) La règle décision permettant de rejeter ou non l'hypothèse que la proportion des électeurs qui font confiance à Monsieur Z dans la population est de 0,52 va être : si, parmi les 100 électeurs interrogés, moins de 42 ou plus de 62 font confiance à Monsieur Z, l'hypothèse de la proportion de 0,52 d'électeurs faisant confiance à Monsieur Z sera rejetée. Sinon, elle sera acceptée.

4) $42<43<62$ et $\frac{43}{100}\in\left[\frac{42}{100};\frac{62}{100}\right]$.
Donc, d'après la règle de décision précédente, on peut considérer l'affirmation de Monsieur Z comme exacte.

Exercice 5 :

On suppose que les 870 jurés sont tirés au sort dans la population du comté (la population étant très importante, on peut considérer qu'il s'agit de tirages avec remise). Sous cette hypothèse, la variable aléatoire X correspondant au nombre de jurés d'origine mexicaine suit la loi binomiale de paramètres $n = 870$ et $p = 0{,}8$.
On peut alors rechercher, en utilisant la loi binomiale, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % correspondant.

Une tabulation de la loi binomiale de paramètres $n = 870$ et $p = 0{,}8$ fournit les résultats ci-contre :

k	$P(X \leq k)$	fréquence k/n
672	0,0245	0,772
673	**0,0296**	**0,774**
...	...	...
718	0,9733	0,825
719	**0,9783**	**0,826**

L'intervalle de fluctuation au seuil des 95 % de la fréquence des jurés d'origine mexicaine est donc :
$\left[\frac{673}{870};\frac{719}{870}\right]$

$$\frac{339}{870} \notin \left[\frac{673}{870};\frac{719}{870}\right]$$

Cette valeur ne se situe pas dans l'intervalle de fluctuation. La différence est significative au seuil de 95 % et l'hypothèse $p = 0{,}8$, avec un titrage aléatoire des jurés, est rejetée.
De fait, l'accusé a obtenu gain de cause et a été rejugé par un autre jury.

Exercice 6 :

1. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de voitures prenant la mauvaise file sur 500.
Sous l'hypothèse choisie, X suit une loi binomiale de paramètres $n=500$ et $p=0{,}4$.

À l'aide d'un tableur ou d'un algorithme, on trouve que l'intervalle de fluctuation au seuil des 95 % de la fréquence des automobiles prenant la mauvaise file est : $\boxed{\left[\frac{179}{500};\frac{222}{500}\right]}$, ou encore $[0{,}358;0{,}444]$.

2. D'après l'échantillon, peut-on considérer, au seuil de 95 %, comme exacte l'affirmation du groupe de citoyens ? $\frac{190}{500}$ appartient à cet intervalle. On peut donc considérer comme exacte l'affirmation du groupe qui affirme que 40 % des automobilistes prennent la mauvaise file.