1ère ST2S - Chapitre 4 - Pourcentages

Introduction : le symbole % signifie : $\boxed{\div 100}$

Exemples de conversions : 3 % = 0,03 17 % = 0,17 1,13 % = 0,013
100 % = 1 0,2 = 20 % 1,5 = 150 % 0,029 = 2,9 %

I- Pourcentages de proportion

Formule : $\boxed{\text{Pourcentage de proportion} = \dfrac{\text{Effectif de la partie}}{\text{effectif total}}}$

1) Calcul d'un pourcentage de proportion

Exemple : dans une classe de 25 élèves, il y a 8 garçons. Calculer le pourcentage de garçons dans cette classe.

$$\frac{\text{Effectif de la partie}}{\text{Effectif total}} = \frac{8}{25} = 0{,}32 = 32\ \%$$

Cette classe compte 32 % de garçons.

2) Calcul de l'effectif de la partie

Exemple : Sur un pot de 250 g de sauce tomate, on lit dans la composition : 65 % de purée de tomates. Calculer la masse (en g) de purée de tomates contenue dans ce pot.

65 % de 250 g = $0{,}65 \times 250$ g = 162,5 g.

Ce pot contient 162,5 g de purée de tomates.

Remarque : le mot « de » en français se traduit par une multiplication.

$\boxed{\text{Effectif de la partie} = \text{Pourcentage de proportion} \times \text{effectif total}}$

3) Calcul de l'effectif total

Exemple : Dans un collège, 16 % des élèves font partie du club théâtre.
On demande au professeur de théâtre combien d'élèves font partie du club. Il répond : 48.
Calculer le nombre d'élèves dans ce collège.

La formule : $\boxed{\text{pourcentage de proportion} = \dfrac{\text{effectif de la partie}}{\text{effectif total}}}$

Donne ici : $$16\ \% = \frac{48}{\text{nombre d'élèves du collège}}$$

Donc $$\text{nombre d'élèves du collège} = \frac{48}{16\ \%} = \frac{48}{0{,}16} = 300$$

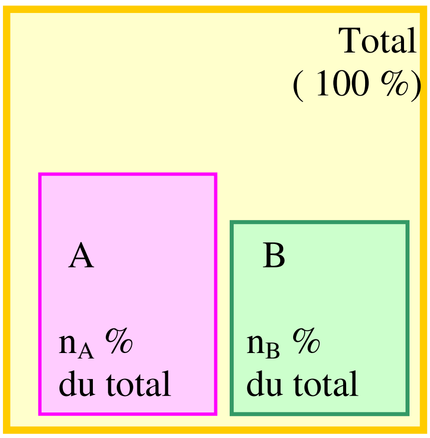
Il y a 300 élèves dans ce collège.

La formule : $$\boxed{\text{pourcentage de proportion} = \frac{\text{effectif de la partie}}{\text{effectif total}}}$$

Donne : $$\boxed{\text{Effectif total} = \frac{\text{effectif de la partie}}{\text{pourcentage de proportion}}}$$

II- Addition de pourcentages.

On peut additionner deux pourcentages de proportion lorsqu'ils se rapportent à deux parties disjointes d'un même ensemble (total).



$A \cap B = \varnothing$

$A \cup B$ représente $(n_A + n_B)$ % du total

Exemple 1 : Dans un lycée, 40 % des élèves sont demi-pensionnaires, et 30 % sont internes. Quel est le pourcentage des élèves du lycée qui mangent à la cantine ?

Les deux pourcentages, 40 % et 30 %, sont des proportions d'un même total : l'ensemble des élèves du lycée. De plus, ils se réfèrent à deux parties disjointes, car un même élève n'est pas à la fois demi-pensionnaire et interne.

On peut donc additionner les pourcentages :
40 % + 30 % = 70 %.

70 % des élèves du lycée mangent à la cantine.

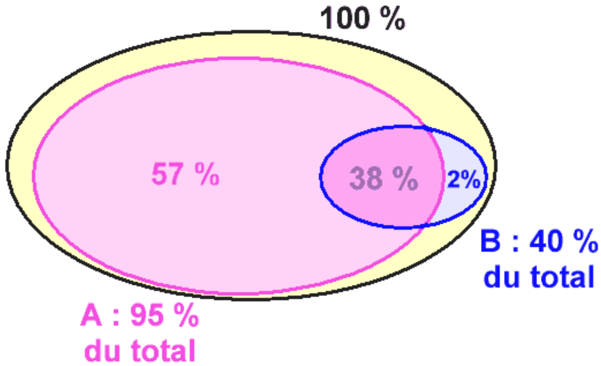
Exemple 2 : Dans un lycée, 95 % des élèves étudient l'Anglais, et 40 % étudient l'Allemand. Quel est le pourcentage des élèves du lycée qui étudient au moins l'une de ces deux langues ?

- Ici, on n'est pas dans un cas où l'on peut additionner des pourcentages, car un même élève peut étudier à la fois l'Anglais et l'Allemand. Donc les deux parties ne sont pas disjointes.

Précision supplémentaire : on sait que 38 % des élèves du lycée étudient à la fois l'Anglais et l'Allemand. Maintenant, on peut calculer :

$$\underbrace{95\ \%}_{\text{étudiant l'Anglais}} + \underbrace{40\ \%}_{\text{étudiant l'Allemand}} - \underbrace{38\ \%}_{\text{étudiant les deux langues, comptés en double}} = 97\ \%$$

Remarque : cette méthode correspond à la formule de probabilités :
$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
(Dans un cas d'équiprobabilité, le calcul des probabilités des événements est identique à celui de pourcentages de proportion)

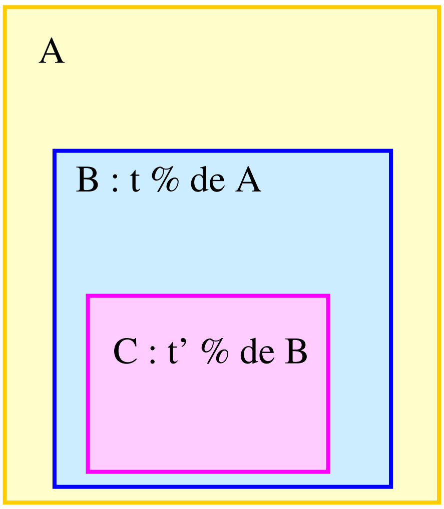


Autre possibilité (diagramme ci-contre) :

57 % + 38 % + 2 % = 97 %, car ici, on additionne les pourcentages de 3 parties disjointes d'un même total.

III- Pourcentage de pourcentage

On fait un produit de pourcentages lorsqu'on a une proportion « dans » ou « parmi » une autre proportion.



- C représente t' % × t % de A

Exemple : Dans une classe, 60 % des élèves sont des garçons, et 30 % des garçons ont les yeux bleus.
On veut savoir quel pourcentage des élèves de la classe représentent les garçons aux yeux bleus.

- On calcule 30 % de 60 % $= 0{,}3 \times 0{,}6$
$= 0{,}18$
$= 18\ \%$

18 % des élèves de la classe sont des garçons aux yeux bleus.

Si, de plus, la moitié des filles de la classe ont les yeux bleus, quel pourcentage des élèves de la classe aura les yeux bleus ?

- Pourcentage de filles aux yeux bleus parmi les élèves de la classe :

$\frac{1}{2}$ de (100 % – 60 %) $= \frac{1}{2} \times 40\ \% = 20\ \%$

Pourcentage d'élèves de la classe aux yeux bleus : 18 % + 20 % = 38 %
(Ici, on a bien 2 pourcentages de proportion d'un même total, correspondant à deux parties disjointes : on est dans le cas du II où l'on peut additionner les pourcentages).

IV- Pourcentages d'évolution, coefficient multiplicatif

Dans une évolution, il y a un état « de départ » (valeur initiale) et un état « d'arrivée » (valeur finale). L'état de référence, celui qui correspond à 100 %, est la valeur initiale. L'augmentation ou la diminution (= baisse) sera une proportion de la valeur initiale.

Formule : $\boxed{\text{Pourcentage d'évolution} = \dfrac{\text{Valeur Finale} - \text{Valeur initiale}}{\text{Valeur Initiale}}}$

1) Calcul du pourcentage d'évolution

Exemple 1 : Monsieur Untel a payé 1 440 € d'électricité en 2006 et 1 600 € en 2008.
Calculer le pourcentage d'augmentation de sa facture d'électricité entre 2006 et 2008.

$$\frac{\text{Valeur Finale} - \text{Valeur Initiale}}{\text{Valeur Initiale}} = \frac{1\,600 - 1\,440}{1\,440} = \frac{160}{1\,440} \approx 0{,}11 = 11~\%$$

La facture d'électricité de Monsieur Untel a augmenté de 11 % entre 2006 et 2008.

Exemple 2 : Un commerçant décide de céder à 145 € un article dont le prix était de 160 €.
Calculer le pourcentage de la remise (arrondi à 0,1 % près).

$$\frac{\text{Valeur Finale} - \text{Valeur Initiale}}{\text{Valeur Initiale}} = \frac{145 - 160}{160} = -\frac{15}{160} = -\,0{,}09375 \approx -\,9{,}4~\%$$

La remise est d'environ 9,4 %.

2) Coefficient multiplicatif. Calcul de la valeur initiale ou de la valeur finale.

Lors d'une **augmentation** de t %, le coefficient multiplicatif est de $\boxed{1 + t~\%}$.

$$\text{Valeur Initiale} \xrightarrow{\times\,(1 + t~\%)} \text{Valeur finale}$$
$$\text{Valeur finale} \xrightarrow{\div\,(1 + t~\%)} \text{Valeur Initiale}$$

Exemple : un chef d'entreprise, au vu des bénéfices, décide d'augmenter les salaires de tous ses employés de 5 %.

Coefficient multiplicatif $= 1 + 5~\% = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$
Ou encore $= 100~\% + 5~\% = 105~\% = 1{,}05$

÷ 1,05

× 1,05

Salaire Initial (€)	1 100	1 250		
Salaire Final (€)			1 680	1 642

⚠ Erreur fréquente : pour trouver le salaire initial, il ne faut pas prendre 5 % du salaire final et les soustraire. En effet, les 5 % se rapportent au salaire initial et non au salaire final.

Lors d'une **diminution** ou **baisse** de t %, le coefficient multiplicatif est de $\boxed{1 - t\ \%}$.

$$\text{Valeur Initiale} \xrightarrow{\times (1 - t\ \%)} \text{Valeur finale}$$

$$\text{Valeur finale} \xrightarrow{\div (1 - t\ \%)} \text{Valeur Initiale}$$

Exemple : Pendant les soldes, un magasin réduit les prix d'une série d'articles de 20 %.

Coefficient multiplicatif $= 1 - 20\ \% = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$
Ou encore $= 100\ \% - 20\ \% = 80\ \% = 0{,}8$

÷ 0,8

Prix Initial (€)	60	250		
Prix Final (€)			45	135

× 0,8

⚠ Erreur fréquente : pour trouver le prix initial, il ne faut pas prendre 20 % du prix final et les additionner. En effet, les 20 % se rapportent au prix initial et non au prix final.

3) Evolutions successives.

Exemple 1 : Pour fêter l'ouverture de son garage, un concessionnaire automobile fait une remise de 10 % sur un modèle de véhicule. Après un entretien, un client obtient encore une remise de 15 % sur le prix réduit.
Calculer le pourcentage de le remise correspondant aux deux remises successives.

$$\text{Prix de départ} \xrightarrow[\times 0{,}9]{-10\ \%} \text{Prix intermédiaire} \xrightarrow[\times 0{,}85]{-15\ \%} \text{Prix final}$$

$$\text{Prix de départ} \xrightarrow[\times 0{,}9 \times 0{,}85 \quad \times 0{,}765 \quad -23{,}5\ \%]{} \text{Prix final}$$

$0{,}9 \times 0{,}85 = 0{,}765$ $\qquad$ $1 - 0{,}765 = 0{,}235 = 23{,}5\ \%$

⚠ La remise n'est pas de 25 % ! On ne peut pas additionner les deux pourcentages de remise, puisque les 15 % accordés ne le sont pas sur le prix de départ (contrairement aux 10 %) mais sur le prix réduit.

Exemple 2 : Calculer le pourcentage d'augmentation correspondant à deux augmentations successives de 10 % et de 20 %.
On nomme V_0 la valeur initiale, V_1 la valeur intermédiaire et V_2 la valeur finale.

$$V_0 \xrightarrow{\substack{\times 1{,}1 \\ +\,10\ \%}} V_1 \xrightarrow{\substack{\times 1{,}2 \\ +\,20\ \%}} V_2$$

$$V_0 \xrightarrow[\substack{\times 1{,}1 \times 1{,}2 \\ \times 1{,}32 \\ +\,32\ \%}]{} V_2$$

Le pourcentage d'évolution correspondant à ces deux évolutions successives est de 32 %.

Exemple 3 : Une valeur augmente de 25 % puis baisse de 25 %.
Globalement, a-t-elle augmenté ou baissé ? De quel pourcentage ?

$$V_0 \xrightarrow{\substack{\times 1{,}25 \\ +\,25\ \%}} V_1 \xrightarrow{\substack{\times 0{,}75 \\ -\,25\ \%}} V_2$$

$$V_0 \xrightarrow[\substack{\times 1{,}25 \times 0{,}75 \\ \times 0{,}9375 \\ -\,6{,}25\ \%}]{} V_2 \qquad \text{car } 1 - 0{,}9375 = 0{,}0625$$

La valeur a baissé de 6,25 %.

Remarques : Eh non ! Après une augmentation puis une baisse du même pourcentage, on n'est pas revenu à la valeur de départ. Remarquez aussi que le résultat serait le même si on commençait par la baisse, puisque $\times\, 1{,}25 \times 0{,}75 = \times\, 0{,}75 \times 1{,}25$